Zur Relaxationslänge der Elektronen in heißen und dünnen Gleichgewichtsplasmen

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität Düsseldorf

vorgelegt
von
Johann Semlyen
aus Klausenburg (Rumänien)

Düsseldorf 1981

Zur Relaxationslänge der Elektronen in heißen und dünnen Gleichgewichtsplasmen

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Universität Düsseldorf

vorgelegt

von

Johann Semlyen

aus Klausenburg (Rumänien)

Düsseldorf 1981

1. Berichterstatter: Prof. Dr. R. W. Larenz

2. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Rebhan

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Februar 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsübersicht

	Seite
1. Einleitung	5
2. Bisherige Untersuchungen und Problemstellung	7
2.1. Bisherige Untersuchungen	7
2.2. Problemstellung	11
3. Dimensionsanalysis	13
4. Beschreibung des Modells	17
4.1. Geschwindigkeit und Laufzeit des Auf-Elektrons	17
4.2. Ablenkungsgeometrische Überlegungen	19
5. Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsschwankungen	21
5.1. Das mittlere Feldstärkenquadrat des Mikrofeldes	21
5.2. Autokorrelationsfunktion und mittlere Korrelationszeit des Mikrofeldes	25
5.3. Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsschwankungen	28
6. Herleitung der Transportweglänge	31
6.1. Integrationen	31
6.2. Diskussion der Relaxationslänge ohne Energieaustausch (Parameter $\omega=0$)	35
6.3. Berechnung der Transportweglänge unter Berücksichtigung des Energie- und Impulsaustausches zwischen den Ladungsträgern	39
6.4. Diskussion der Relaxationslänge für Parameterwerte $\omega \to 0$	45
7. Herleitung der Relaxationslänge auf Grund der exakten Beziehung zwischen Geschwindigkeit und ablenkendem Feld (kontinuierliche Darstellung)	47
8. Diskussion der Ergebnisse	54

Seite

9. Zusammenfassung 61
10. Anhang 64
11. Literaturverzeichnis 79

Dank
Lebenslauf

Si un hombre nunca se contradice,
será porque nunca dice nada.

MIGUEL DE UNAMUNO Y JUGO (1864-1936)

1. Einleitung

Die Transportweglänge ist eine grundlegend wichtige Größe der Plasmaphysik bei Fragen der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit, Diffusion, Viskosität usw.
Transportphänomene in Plasmen werden üblicherweise auf Grund geeigneter Modellvorstellungen studiert. Diese Modelle versuchen, die wichtigsten physikalischen Eigenschaften des Systems bei mehr oder weniger gegebener mathematischer Traktabilität zu beschreiben.
In der kinetischen Plasmatheorie führt die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den geladenen Teilchen bei den üblichen Modellen zu Integralen, die für große Abstände divergieren. Das bedeutet, daß in allen Stoßprozessen zwischen Ladungsträgern die großen Abstände eine wesentliche Rolle spielen. Ein Probeteilchen wird aber von den weit entfernten Feldteilchen nur um kleine Winkel abgelenkt. Ausgehend von dieser Erkenntnis ergibt sich die Möglichkeit, Relaxationszeiten in vollionisierten Plasmen mit Hilfe des Fokker-Planck-Modells zu bestimmen, wenn man entsprechende Abschneideparameter einführt.
In schwachionisierten Plasmen dagegen verwendet man ein anderes Modell; man geht nämlich davon aus, daß der Hauptbeitrag zur Ablenkung geladener Teilchen von den Einzelstößen mit neutralen Atomen herrührt. In dieser Situation fußt die Bestimmung der Transportkoeffizienten auf der Boltzmannschen Stoßgleichung.
Die zahlreichen Untersuchungen, die zur Bestimmung der Relaxationszeiten und der damit zusammenhängenden weiteren Größen bisher vorgenommen worden sind, beruhen auf nachträglich mit Korrekturen versehenen Zweierstoß-Methoden, wobei keine Energieänderung bei Anwendung auf Elektronen-Ionen-Stöße resultiert, letzteres als Folge des stark von 1 abweichenden Massenverhältnisses. Mehrfachstöße, die auf die langreichweiti-

gen Coulomb-Kräfte zurückzuführen sind und die gleichzeitige Wechselwirkung vieler geladener Teilchen innerhalb einer Debye-Kugel beinhalten, werden üblicherweise als eine Folge von schwachen Zweierstößen behandelt.
Die Fokker-Plancksche Diffusionsgleichung beschreibt zwar die kumulativen Wirkungen der vielen entfernten Teilchen, liefert aber keine widerspruchsfreie Berücksichtigung der kollektiven Wechselwirkung, da man bei der Bestimmung der Fokker-Planck-Koeffizienten wiederum auf Zweierstoßmethoden zurückgreifen muß.
Da nach allgemeiner Überzeugung die Zweierstöße im Plasma allein nicht ausreichen, Relaxationszeiten bzw. Relaxationslängen zu bestimmen, wird in der vorliegenden Arbeit ein neuer Versuch unternommen, die o.g. Größen unter Berücksichtigung der gesamten Feldwirkung der Umgebung auf kollektiver Basis zu berechnen. Den Ausgangspunkt bilden bei dieser Untersuchung die Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeitsschwankungen infolge des Plasma-Mikrofeldes.

2. Bisherige Untersuchungen und Problemstellung

Das Zeitintervall, während dessen die Stöße eine merkliche Änderung der zum Anfangszeitpunkt vorliegenden Geschwindigkeitsverteilung hervorrufen, wird üblicherweise als Relaxationszeit bezeichnet. In der Literatur werden zwei verschiedene Relaxationszeiten unterschieden: Impuls- und Energierelaxationszeit. Wegen der Vielfalt der Relaxationsprozesse liegt für diese Begriffe keine ganz klare Definition vor. Die Impulsrelaxationszeit wird dadurch definiert, daß sich nach Ablauf dieser Zeit im Mittel die Richtung des Anfangsimpulses um den Winkel 90° geändert hat (eine leicht modifizierte Variante dieser Definition werden wir im weiteren benutzen). Unter Energierelaxationszeit versteht man das Zeitintervall, nach dessen Ablauf eine merkliche Änderung der kinetischen Energie des Teilchens (etwa um den Anfangswert im Mittel) erreicht wird.

2.1. Bisherige Untersuchungen

Bevor wir uns der modernen Literatur zur Bestimmung der Relaxationszeiten und Relaxationslängen zuwenden, ist es vollständigkeitshalber angebracht, einen Blick auf die älteren experimentellen und theoretischen Untersuchungen zu werfen. Ende der zwanziger Jahre hat Langmuir /1/ die Einstellung der Maxwellschen-Geschwindigkeitsverteilung in der homogenen positiven Lichtbogensäule von Gasentladungen bei niedrigen Drukken mit von ihm entwickelten Sondenmethoden nachgewiesen. Unter Berücksichtigung des elektrischen Feldes, das durch Plasmaschwingungen entsteht, hat er versucht die gemessenen kurzen Relaxationszeiten theoretisch zu erklären.
Einige Jahre später haben andere Autoren (Landau /2/, Gvosdover /3/, Druyvesteyn /4/, siehe auch die zusammenfassende Darstellung von Rompe und Steenbeck /5/) Energie- und Impulsrelaxationslängen berechnet, wobei die teilweise auf verschiedenen Mechanismen des Energie- und Impulsaustausches beruhenden Rechnungen Ergebnisse zeigten, die erstaunlicherweise den glei-

chen funktionalen Charakter bezüglich der Abhängigkeit von den Plasmaparametern aufwiesen und zwar:

(2.1) $$l \simeq \frac{k_B^2 T^2}{e^4 n \cdot \ln(k_B T / e^2 n^{1/3})},$$

wobei
l: die Relaxationslänge,
k_B: die Boltzmann-Konstante,
e: die Elementarladung,
n: die Elektronendichte bedeutet.
Von Zahlenfaktoren wurde in (2.1) abgesehen.
Das im sog. Coulomb-Logarithmus stehende Argument ist das Verhältnis der mittleren thermischen Energie der Elektronen zum Betrag der mittleren potentiellen Wechselwirkungsenergie zweier benachbarter Ladungsträger.
Es ist allein aus Dimensionsgründen natürlich sofort einzusehen, daß bei der Berechnung von l aus Einzelstößen der oben angegebene funktionale Zusammenhang auftreten muß (siehe dazu auch den Abschnitt 3). Das besagt aber noch nicht, daß ein anderer Mechanismus des Energie- und Impulsaustausches, wobei gleichzeitig mehrere geladene Teilchen zusammenwirken (kollektive Wechselwirkung) nicht zu einem anderen funktionalen Zusammenhang führen könnte. An dieser Stelle sei zunächst auf zwei von Gabor in den dreißiger Jahren hergeleitete Energierelaxationslängen hingewiesen /6/, /7/:

(2.2) $$l = 0{,}43 \frac{(k_B T)^{5/4}}{e^{5/2} n^{3/4}}$$

und

(2.3) $$l = 125 \frac{(k_B T)^{1/2}}{e\, n^{1/2}}.$$

Gabor berücksichtigt in diesen Arbeiten das elektrostatische Gegenfeld, das die unsymmetrische Verteilung der Debye-Hückelschen Raumladungsschicht um ein bewegtes Elektron hervorruft.

Vor dem fliegenden Auf-Elektron haben die anderen Plasmaelektronen noch keine Zeit gehabt auszuweichen, so daß hier die positive Raumladungsschicht noch nicht vollständig ausgebildet ist; hinter dem Probe-Elektron dagegen haben die verdrängten Elektronen ihre ursprünglichen Plätze noch nicht wiederbesetzt. Es tritt also ein elektrisches Feld auf, das den Flug des Auf-Elektrons abzubremsen, seine kinetische Energie auf die Gesamtheit zu übertragen versucht.
Larenz /8/ hat die Ablenkung einer bewegten Ladung im zeitlich und örtlich schwankenden elektrischen Mikrofeld statistisch untersucht und das Ergebnis

$$l_c \simeq \frac{k_B T}{e^2 n^{2/3}} \qquad (2.4)$$

erhalten, wenn man von Zahlenfaktoren wiederum absieht.
Diese Länge liefert für sehr dünne und heiße Plasmen (insbesondere im astrophysikalischen Bereich) viel plausiblere Werte als (2.1)
Zur Bestimmung der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit benötigt man die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen, die der Boltzmannschen Stoßgleichung genügt. Die eigentliche Schwierigkeit bei der Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung liegt in der Berücksichtigung der Begegnungen mit anderen Teilchen, also der rechten Seite der Stoßgleichung (Stoßterm). Die nahen Vorübergänge, die mit großer Impulsübertragung vor sich gehen, lassen sich näherungsweise als elastische Zweierstöße auffassen. Für diesen Fall haben Chapman und Cowling /9/ die Theorie weitgehend entwickelt. Für Stoßparameter, die größer sind als der mittlere Teilchenabstand, treten dagegen Mehrfachstöße auf. Da die sukzessiven Geschwindigkeitsänderungen des Probe-Teilchens einen Markoff-Prozeß darstellen, dessen Wahrscheinlichkeitsdichte der Fokker-Planckschen Gleichung genügt, ist es naheliegend, Transportkoeffizienten in vollionisierten Plasmen unter Vernachlässigung der "engen Stöße" mit Hilfe dieser Diffusionsgleichung zu bestimmen. Im Anschluß an die diesbezüglichen Arbeiten von Chandrasekhar /10, 11, 12/ haben Cohen, Spitzer und

Routly /13/, später Spitzer und Härm /14/ die elektrische und thermische Leitfähigkeit eines vollionisierten Plasmas berechnet.
Überraschenderweise liefern beide Methoden (Chapman und Cowling bzw. Spitzer und Mitarbeiter) gut übereinstimmende Ergebnisse. Spitzer und Mitarbeiter haben unter Berücksichtigung der Wechselwirkung von Elektronen mit Z-fach geladenen Ionen und von Elektronen untereinander folgende Formel der elektrischen Leitfähigkeit hergeleitet:

$$\sigma = \frac{4\cdot 2^{1/2}\,\gamma_E (k_B T)^{3/2}}{\pi^{3/2} Z e^2 m_e^{1/2}} \left[\ln\left(\frac{3(k_B T)^{3/2}}{2\pi^{1/2} Z e^3 n^{1/2} (1+Z)^{1/2}}\right)\right]^{-1}. \tag{2.5}$$

Der Koeffizient γ_E beträgt 0,582 für Z=1.
Aus einfachen gaskinetischen Überlegungen folgt andererseits, daß die elektrische Leitfähigkeit sich in der Form

$$\sigma = \frac{n e^2 l}{(3 m_e k_B T)^{1/2}} \tag{2.6}$$

schreiben läßt mit l als mittlerer freier Weglänge der Elektronen zwischen Zusammenstößen mit anderen Partnern.
Aus dem Vergleich von (2.5) mit (2.6) folgt für ein Wasserstoffplasma

$$l_{Sp} = 0{,}683 \frac{k_B^2 T^2}{e^4 n \cdot \ln(0{,}712 k_B T / e^2 n^{1/3})}, \tag{2.7}$$

in Übereinstimmung mit (2.1).
Wir geben hier noch eine mittlere freie Weglänge nach Spitzer /14/ an, die lediglich die Elektron-Ion Wechselwirkung beinhaltet (sie ist proportional zum reziproken Wirkungsquerschnitt der Ionen gegenüber Elektronenstoß):

(2.8) $$l_{sp}^{+} = 1{,}173 \frac{k_B^2 T^2}{e^4 n \cdot \ln(0{,}712\, k_B T / e^2 n^{1/3})} .$$

Da die Literatur über Transport- bzw. Relaxationsphänomene in den letzten Jahren sehr umfangreich geworden ist, müssen wir uns an dieser Stelle mit der Aufzählung einiger oft zitierter Autoren begnügen.
Suchy geht von der Grad-Entwicklung der Verteilungsfunktion nach Orthogonalpolynomen aus, um Transportkoeffizienten bei schwachen Gleichgewichtsabweichungen zu bestimmen /15/.
Devoto und Capitelli berechnen Transportkoeffizienten in verschiedenen, teilionisierten Gasen bei hohen Temperaturen auf der Grundlage der Chapman-Enskog-Burnett-Theorie /16/, /17/, /18/.
Ein kompliziertes System von Master-Gleichungen wird von Cacciatore und Capitelli numerisch gelöst, um die Relaxationszeiten angeregter Quantenzustände in einem optisch dünnen Sauerstoffplasma zu bestimmen /19/.
Wilhelm und Winkler diskutieren den relaxierenden Übergang zwischen zwei stationären Zuständen eines schwachionisierten Neon-Plasmas im Nieder- bzw. Mitteldruckbereich bei zusätzlicher Aufheizung durch ein äußeres elektrisches Feld /20/.

2.2. Problemstellung

In der vorliegenden Arbeit werden Relaxationslängen in Plasmen an Hand einer geeigneten Modellvorstellung bei voller Berücksichtigung der kollektiven Wechselwirkung zwischen den Ladungsträgern neu berechnet.
Betrachtet werden ausschließlich heiße und dünne, klassisch behandelbare Plasmen, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht oder wenigstens nahe demselben befinden.
Der Ionisationsgrad muß lediglich die Bedingung erfüllen, daß der effektive Wirkungsquerschnitt der Ladungsträger für deren Wechselwirkung untereinander denjenigen der Wechselwirkung mit neutralen Teilchen überwiegt.
Außerdem setzen wir Quasineutralität ($n^+ = n^- = n$) und räumliche

Isotropie (keine starken äußeren Felder) voraus.
Grundlage der Untersuchung sind die Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeitsschwankungen infolge des Mikrofeldes. Ionen-Feldkomponenten längs und quer zur Elektronenbahn bewirken, daß sich das Auf-Elektron in einem rheonomen Potentialfeld bewegt, welches Energie- und Impulsaustausch mit der Umgebung zuläßt.
Die Wechselwirkung der Elektronen untereinander führt praktisch zum Austausch ihrer Plätze innerhalb der Elektronenenergieverteilung. Der Gesamtimpulsaustausch verschwindet bei diesen Begegnungen /5/.

Eine Neudiskussion von Transportkoeffizienten erscheint im Sinne der Hunger-Larenzschen Theorie /21/ notwendig, die für typische Plasmabedingungen ($k_B T/e^2 n^{1/3} > 1$) gezeigt haben, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung des zeitlich und örtlich schwankenden Mikrofeldes eine Gauß-Verteilung ist. Genauer läßt sich die Mikrofeldverteilung als Faltung einer Holtsmark- mit einer Gauß-Verteilung darstellen /22/. Der Holtsmarksche Anteil rührt von dem dem Aufpunkt im Mittel nächstbenachbarten Ladungsträger her, während der Gaußsche Beitrag für die Fernfeldwirkung weit entfernter geladener Teilchen verantwortlich ist. Wenn man die Holtsmarksche Normalfeldstärke $F_o = 2{,}61 e n^{2/3}$ /23/ mit der Gaußschen $E_o = (8\pi n k_B T)^{1/2}$ vergleicht, stellt man fest, daß für heiße und dünne Plasmen die Faltung der beiden die Gauß-Verteilung praktisch unverändert läßt.
Die genannten Verteilungen gelten eigentlich zunächst nur für einen von Ladungsträgern unbesetzten Aufpunkt im Plasma. Unter den Bedingungen heißer und dünner Plasmen gelten die gleichen Verteilungen auch am Ort eines (unbewegten) Ladungsträgers, speziell eines Elektrons, da dieser eine Ladungsträger nicht in der Lage ist, die gegen 1 sehr große Zahl von Ladungsträgern, speziell Ionen, in einer Umgebung von der größenordnungsmäßigen Ausdehnung einer Debye-Sphäre in ihrem Bewegungsverhalten merklich zu beeinflussen.

3. Dimensionsanalysis

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie sich im Plasma, allein aus Dimensionsbetrachtungen, ausgehend von den 3 grundlegenden diskreten Parametern e, n, $k_B T$, eine Länge herstellen läßt.
Die allgemeine Darstellung einer Länge bei gleicher Elektronen bzw. Ionentemperatur und in Abwesenheit von äußeren Feldern lautet

$$l \sim [n^{-1/3}] \left[\frac{e^2 n^{1/3}}{k_B T}\right]^a, \tag{3.1}$$

wobei
$n^{-1/3}$ proportional zum mittleren Teilchenabstand der Ladungsträger,
$e^2/k_B T$ die sog. Landau-Länge,
a eine beliebige reelle Zahl ist.
Die eckigen Klammern weisen darauf hin, daß es sich nur um die Dimension der eingeschriebenen Größen handelt.
Wegen der weitreichenden Coulomb-Kräfte treten im Plasma gleichzeitig Zweiteilchen-Wechselwirkungs-Eigenschaften und kollektive Phänomene auf. Wie wir schon im Abschnitt 2.1. gesehen haben, sind die auf Grund der Zweierstoß-Methoden berechneten Relaxationslängen proportional zur reziproken Elektronendichte. Aus (3.1) folgt dann sofort, daß in diesem Fall der Exponent a=-2 sein muß. Damit ergibt sich die Länge

$$l_z \sim \frac{k_B^2 T^2}{e^4 n}. \tag{3.2}$$

Betrachten wir nun das Plasma als eine Flüssigkeit, gehen also zu einer Kontinuumstheorie über. Im Kontinuums- oder Diffusionslimes möchte man die Teilcheneigenschaften der Ladungsträger dadurch ausschalten, daß man ein Teilchen in P gleiche Stücke zerlegt und dann $P \longrightarrow \infty$ streben läßt /24/. Dadurch ändert sich die Masse, Elementarladung, Boltzmann-Konstante und Elektronendichte wie folgt:

(3.3)
$$\begin{cases} m^* = \frac{m}{P} \to 0 \\ e^* = \frac{e}{P} \to 0 \\ k_B^* = \frac{k_B}{P} \to 0 \\ n^* = nP \to \infty \end{cases}$$

für $P \to \infty$, wobei mit $*$ die transformierten Größen bezeichnet wurden. Die kollektiven Eigenschaften des Plasmas (Plasmafrequenz ω_p , Debye-Länge λ_D , Ladungsdichte $e \cdot n$, mittlere thermische Energiedichte $k_B T n$ usw.) bleiben bei dieser Prozedur unverändert:

(3.4)
$$\begin{cases} \omega_p^* = \sqrt{\frac{4\pi n^* e^{*2}}{m^*}} = \omega_p \\ \lambda_D^* = \sqrt{\frac{k_B^* T}{4\pi n^* e^{*2}}} = \lambda_D \\ e^* n^* = en \\ k_B^* T n^* = k_B T n \,. \end{cases}$$

Die Konstanz der Debye-Länge ist sinnvoll, da λ_D auch auf einem hydrodynamischen Wege herleitbar ist /25/.
Das Plasma verhält sich also in dieser Beschreibungsweise wie eine ideale Flüssigkeit, die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion verschwindet (für Plasmen im thermodynamischen Gleichgewicht), während die Wechselwirkung zwischen großen Teilchenensembles unverändert bleibt. Wir suchen die Länge, die im Kontinuumslimes endlich bleibt.
(3.1) lautet umgeschrieben:

(3.5)
$$l_K \sim \frac{(en)^{2a} \cdot n^{-\frac{2a+1}{3}}}{(k_B T n)^a} \,.$$

Um lim l endlich zu halten, muß a=-1/2 sein.

$e \to 0$
$n \to \infty$
$k_B \to 0$
$en = const$
$k_B Tn = const$

Die Relaxationslänge im Kontinuumslimes ist also proportional zur Debye-Länge:

(3.6) $$l_K \sim \frac{(k_B T)^{1/2}}{e n^{1/2}} .$$

Der noch freie Zahlenfaktor wird dabei viel größer als 1 anzusehen sein (siehe auch Abschnitt 6.2).
Hunger und Larenz /26/ haben, in Übereinstimmung mit der vorgenannten Überlegung, bei der Betrachtung der Feldwirkungen auf die Plasmateilchen überschlagsweise gezeigt, daß die Zeit einer merklichen Impulsänderung im Plasma durch die reziproke Ionen- bzw. Elektronenplasmafrequenz gegeben ist.
Im realen Plasma muß man versuchen, die Teilcheneigenschaften mit der Kontinuumsbeschreibung zu verknüpfen. Dazu braucht man die Gewichte der beiden Anteile, die a priori leider nicht bekannt sind. Deswegen hilft uns diese einfache Dimensionsanalysis bei der Bestimmung der Relaxationslänge im Plasma zunächst nicht weiter. Trotzdem kann man versuchsweise durch spezielle Mittelbildungen folgende Möglichkeiten ins Auge fassen:
a) Die Relaxationslänge läßt sich als geometrisches Mittel der beiden Anteile (Zweierstoß, Kontinuumslimes) darstellen:

(3.7) $$l = (l_z \cdot l_K)^{1/2} \sim \frac{(k_B T)^{5/4}}{e^{5/2} n^{3/4}} .$$

(vergl. Gl. (2.2))
Oder allgemeiner:

(3.7') $$l = l_z^{s} \cdot l_K^{1-s} .$$

Für s=1/3 oder a=-1 entsteht aus (3.7') bzw. (3.1) die unter (2.4) von Larenz angegebene Relaxationslänge, die merkwürdigerweise in einer früheren Untersuchung von Rompe und Steenbeck /5/ über die möglichen einfachen Kombinationen von Plasmaparametern zu einer

Länge übersehen worden war.
b) Eine Relaxationslänge, die man, ähnlich wie die reduzierte Masse, als harmonisches Mittel

$$l = \frac{l_z l_K}{l_z + l_K} \tag{3.8}$$

schreiben kann, ist proportional zur Debye-Länge (unter den in Frage kommenden Plasmabedingungen l_z stets größer als l_K). Die obigen Überlegungen gestatten uns einerseits einen Einblick in den physikalischen Inhalt der beiden Gaborschen Formeln (2.2) bzw. (2.3) zu gewinnen, helfen andererseits bei der Interpretation der verschiedenen Längen, die im weiteren hergeleitet werden.

Nach dieser Vorbereitung wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit der Beschreibung des Modells beschäftigen.

4. Beschreibung des Modells

4.1. Geschwindigkeit und Laufzeit des Auf-Elektrons

Die Bewegung eines Teilchens der Masse m, Ladung e im räumlich und zeitlich schwankenden Plasma-Mikrofeld wird durch die Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{v}}(t,t_o) = \frac{e}{m}\vec{E}(t,t_o) \tag{4.1}$$

beschrieben.
Durch Integration erhält man die Geschwindigkeit des Probeteilchens

$$\vec{v}(t,t_o) = \vec{v}(t_o) + \frac{e}{m}\int_{t_o}^{t_o+t}\vec{E}(t',t_o)\,dt'. \tag{4.2}$$

Im zweiten Teil der Arbeit werden wir die Relaxationslänge mit Hilfe der exakten Beziehung (4.2) zwischen Geschwindigkeit und ablenkendem Feld zu bestimmen versuchen (kontinuierliche Darstellung). An dieser Stelle können wir aber die Ausgangsgleichung (4.2) durch geeignete Zerlegung des Zeitintervalls $[t_o, t_o+t]$ etwas vereinfachen. Wir wählen die Zeitintervalle $\tau_k(v)$ derart, daß sich das Plasmafeld während eines mittleren Laufzeitintervalls $\langle\tau_k(v)\rangle_v$ nicht wesentlich ändert.
Setzt man also voraus, daß die Bedingung

$$\left|\frac{d\vec{E}}{dt}\right|\Delta t \ll |\vec{E}| \tag{4.3}$$

erfüllt ist (was später gezeigt werden muß), wobei

$$\Delta t \geq \langle\tau_k\rangle, \tag{4.4}$$

so läßt sich das Zeitintegral (4.2) durch eine Summe ersetzen (diskontinuierliche Darstellung) und die Geschwindigkeit des Auf-Elektrons auf der n-ten Strecke entsprechend dem n-ten Zeitintervall τ_n lautet:

$$\vec{v}_n = \vec{v} + \frac{e}{m_e}\sum_{k=1}^{n}\vec{E}_k\tau_k = \vec{v} + \sum_{k=1}^{n}\Delta\vec{v}_k \tag{4.5}$$

mit $\vec{v}=\vec{v}(t_o)$.
Die Schwankungen der Geschwindigkeit sind mit den entsprechenden Feldkomponenten durch die einfache Beziehung

$$\Delta v_{k\parallel} = \frac{e}{m_e} E_{k\parallel} \tau_k \tag{4.6}$$

verknüpft.
Die $\parallel$-Richtung ergibt sich aus der Projektion der momentanen Flugrichtung auf die Richtung der Geschwindigkeit im vorangehenden Zeitintervall τ_{k-1}, während sich die $\perp$-Richtung auf eine dazu senkrechte Richtung bezieht.
Betrachtet man die Ablenkung eines Auf-Elektrons im Ionenfeld, so läßt sich die geschwindigkeitsabhängige Laufzeit des Probeteilchens auf einer Strecke $v_k \cdot \tau_k$ durch die Beziehung

$$\tau_k = \tau_i^* \left[1 + \frac{v_k^2}{v_{oi}^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{4.7}$$

definieren, wobei
v_{oi} die mittlere thermische Geschwindigkeit der Ionen, τ_i^* die mittlere Korrelationszeit des Ionenfeldes an festem Ort ist, definiert mit Hilfe des Zeitintegrals der Korrelationsfunktion des Ionen-Mikrofeldes (siehe Abschnitt 5.2).
Anwendung von (4.7) führt dazu, daß die Laufzeit eines Elektrons durch den Bereich etwa konstanten Feldes im Mittel natürlich um den Faktor v_{oe}/v_{oi} kürzer ist, als die mittlere Korrelationszeit des Ionenfeldes an festem Ort.
Im folgenden definieren wir die Transportweglänge als das statistische Mittel der Bahnprojektion auf die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bis zu einer mittleren Gesamtablenkung von 90°.
In diesem Sinne läßt sich die Relaxationslänge wie folgt schreiben:

$$l(v) = \sum_{n=1}^{N_{90^\circ}} \langle v_n \tau_n \cos\vartheta_n \rangle, \tag{4.8}$$

wobei $\langle \cdots \rangle$ Mittelung über alle Schwankungen der auftretenden Größen v_n, τ_n, ϑ_n bedeutet.
Nachdem die Geschwindigkeit und die Laufzeit des Auf-Elektrons eingeführt wurden, muß man noch eine Beziehung zwischen den in (4.8) auftretenden Winkeln herleiten.

4.2. Ablenkungsgeometrische Überlegungen

Eine schematische Veranschaulichung der Ablenkung eines Probeteilchens im Mikrofeld entnimmt man folgender, räumlich zu sehender Abbildung:

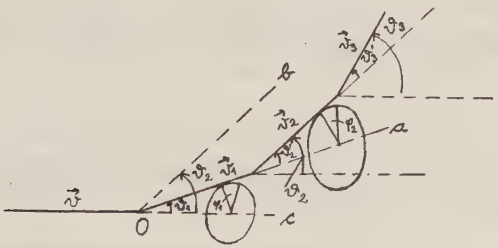


Abbildung 1
Ablenkung eines Probeteilchens im Mikrofeld

Selbstverständlich treten sowohl positive als auch negative Winkeländerungen auf. Setzen wir nun den Punkt O in die Mitte einer Einheitskugel und betrachten die Durchstoßpunkte A', B' bzw. C' der Halbgeraden Oa, Ob bzw. Oc auf der Kugeloberfläche:

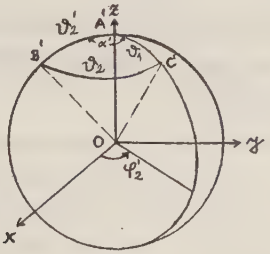


Abbildung 2
Konstruktion des sphärischen Dreiecks A'B'C' zur Gl.(4.9)
OA': Polarachse

Wenden wir jetzt den Kosinussatz im sphärischen Dreieck A'B'C' an:

(4.9) $$\cos\vartheta_2 = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2' + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2'\cos\alpha',$$

wobei

$$\alpha' = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2' \tag{4.10}$$

Mitteln wir Gl. (4.9) über den Winkel φ_2' und beachten, daß die Fluktuationen der Geschwindigkeit auf den verschiedenen Abschnitten statistisch unabhängig sind (siehe auch Abschnitt 5.3), so ergibt sich:

$$\langle \cos\vartheta_2 \rangle_{\varphi_2'} = \langle \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2' \rangle_{\varphi_2'} = \cos\vartheta_1 \langle \cos\vartheta_2' \rangle_{\varphi_2'}. \tag{4.11}$$

Analog gilt:

$$\langle\langle \cos\vartheta_3 \rangle\rangle_{\varphi_2', \varphi_3'} = \langle\langle \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3' \rangle\rangle_{\varphi_2', \varphi_3'} = \langle \cos\vartheta_2 \rangle_{\varphi_2} \langle \cos\vartheta_3' \rangle_{\varphi_3'}. \tag{4.12}$$

Die Verallgemeinerung von (4.12) besagt, daß der Mittelwert von $\cos\vartheta_n$ (gemittelt über alle Azimutalwinkel φ_p') sich multiplikativ aus den Einzelbeiträgen zusammensetzt:

$$\cos\vartheta_n = \prod_{p=1}^{n} \langle \cos\vartheta_p' \rangle_{\varphi_p'} \tag{4.13}$$

Um die mittlere Korrelationszeit des Ionenfeldes berechnen zu können, beschäftigen wir uns zunächst mit der Bestimmung des mittleren Feldstärkenquadrats.

5. Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsschwankungen

5.1. Das mittlere Feldstärkenquadrat des Mikrofeldes

In der klassischen Statistik ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte $W(\vec{E})$ eines kanonischen Systems mit Coulomb-Wechselwirkung an einem neutralen Aufpunkt der Ausdruck

$$W(\vec{E}) = \frac{\int \dots \int_{6N} \delta(\vec{E} - \sum_{n=1}^{N} \vec{E}_n) \exp(-H/k_B T) \prod_n d\vec{p}_n d\vec{r}_n}{\int \dots \int_{6N} \exp(-H/k_B T) \prod_n d\vec{p}_n d\vec{r}_n} . \tag{5.1}$$

Die δ-Funktion sorgt dafür, daß in (5.1) nur diejenigen Teilchenkonfigurationen vorkommen, für die

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{N} \frac{e_n \vec{r}_n}{r_n^3} \tag{5.2}$$

ist. H ist die Hamilton-Funktion, die für ein System von Elektronen und Ionen lautet:

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left[\frac{p_{ki}^2}{m_{ki}} + \frac{p_{ke}^2}{m_{ke}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left[\frac{e^2}{|\vec{r}_{ke} - \vec{r}_{le}|} + \frac{e^2}{|\vec{r}_{ki} - \vec{r}_{li}|} \right]_{(k \neq l)} - \sum_{k,l} \frac{e^2}{|\vec{r}_{ke} - \vec{r}_{li}|} . \tag{5.3}$$

Der Index "i" bezieht sich auf die Ionen, "e" auf die Elektronen.

Wie wir bereits im Abschnitt 2.2 darauf hingewiesen haben, lassen sich die aus (5.1) resultierenden Ausdrücke für das mittlere Feldstärkenquadrat $\langle \vec{E}^2 \rangle$ in heißen und dünnen Plasmen, entgegen der ursprünglichen Bedeutung von $W(\vec{E})$, auch am Ort eines Elektrons anwenden.

Da die Nahwechselwirkung zweier, entgegengesetzt geladener Teilchen offenbar zur Divergenz des Ausdrucks (5.1) führt, muß von vornherein $|\vec{r}_{ke} - \vec{r}_{li}| \to 0$ ausgeschlossen werden. Infolgedessen ist (5.1) sinnlos, solange es für den Ausschluß keine Vorschrift gibt. Vorschlag: Man sollte die Exponentialfunktion $\exp(-H/k_B T)$ durch eine allgemeine, integrable Verteilungsfunktion F im Phasenraum ersetzen, mit der Normierungsbedingung

(5.4) $$\int_{6N}\cdots\int F(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N,\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_N)\prod_n d\vec{r}_n d\vec{p}_n = 1 .$$

In diesem Sinne verfahren Hunger und Larenz /21/, wie gleich näher ausgeführt wird.

Für Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht besteht keine Korrelation zwischen Konfigurationen im Orts- bzw. Impulsraum, so daß die $\vec{p}_n$-Integrale in (5.1) mühelos ausführbar sind. Dagegen läßt sich die $\vec{r}_n$-Integration nur näherungsweise ausführen.

In der ursprünglichen Holtsmarkschen Arbeit /23/ wurde die Wechselwirkung zwischen den Teilchen völlig vernachlässigt, so daß sich (5.1) auf den viel einfacheren Ausdruck

(5.5) $$W(\vec{E}) = \int_{3N}\cdots\int \delta(\vec{E} - \sum_{n=1}^{N}\vec{E}_n)\prod_n \frac{d\vec{r}_n}{V^N}$$

reduziert.

Hunger und Larenz berechnen die Mikrofeldverteilung für ein System von N Punktladungen mit Wechselwirkung /21/ unter der Bedingung der Quasineutralität mit Hilfe der mikrokanonischen Verteilung und der zusätzlicher Forderung endlicher kinetischer Energie. Ihr Verfahren unterscheidet sich vom Holtsmarkschen durch Einführung einer Geschwindigkeitsverteilung (die nicht notwendig die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung sein muß) und des die Gesamtenergie berücksichtigenden Faktors.

Andere Autoren dagegen (Theimer und Gentry /27/, Ecker und Müller /28/) berechnen $W(\vec{E})$ für ein System von virtuellen, unkorrelierten Teilchen, die aber als Quellen des abgeschirmten Coulomb-Feldes zu betrachten sind. Im weiteren möchten wir diese Idee etwas ausführlicher betrachten.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $W(\vec{E})$ läßt sich ähnlich wie in (5.5) schreiben

(5.6) $$W(\vec{E}) = \frac{1}{V^N}\int_{3N}\cdots\int \delta(\vec{E} - \sum_{n=1}^{N}\vec{E}_n^{*})\prod_n d\vec{r}_n ,$$

wobei $\vec{E}_n^{*}$ das abgeschirmte Feld bedeutet. Mit Hilfe des bekannten Debye-Hückel-Potentials

(5.7) $$\psi_n^{*}(r) = \frac{e}{r}e^{-\kappa r} \quad ; \quad \kappa = \frac{1}{\lambda_D} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{k_B T}}$$

erhält man die Feldstärke

$$\vec{E}_n^*(r) = -\vec{\nabla}\psi_n^*(r) = \frac{e}{r^2} e^{-\kappa r}(1+\kappa r)\vec{e}_r . \tag{5.8}$$

Zur Berechnung des mittleren Feldstärkenquadrats ist es vorteilhaft, von der Verteilungsfunktion für die Feldstärkenquadrate auszugehen:

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \int_0^\infty \vec{E}^2 W(\vec{E}^2)\, d\vec{E}^2 = \frac{1}{V^N}\int_{3N}\cdots\int \vec{E}^2 \delta\Big(\vec{E}^2 - \sum_{n,n'} \vec{E}_n^* \vec{E}_{n'}^*\Big) \prod_n d\vec{r}_n\, d\vec{E}^2 . \tag{5.9}$$

Die gemischten Produkte $\vec{E}_n^* \vec{E}_{n'}^*$, verschwinden im Mittel wegen der statistischen Verteilung der virtuellen Teilchen, so daß

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{V^N}\int_{3N}\cdots\int \sum_{n=1}^{N} \vec{E}_n^{*2} \prod_{n=1}^{N} d\vec{r}_n = \tag{5.10}$$

$$= 4\pi n e^2 \int_0^\infty \frac{(1+\kappa r)^2}{r^2} e^{-2\kappa r}\, dr .$$

Daraus folgt:

$$\frac{\langle \vec{E}^2 \rangle}{8\pi} = \frac{n e^2}{2}\left[\left(\frac{1}{r} + \frac{\kappa}{2}\right) e^{-2\kappa r}\right]_{r\to 0} . \tag{5.11}$$

Der erste Term in (5.11) ist die Selbstenergie der reellen Teilchen, während der zweite Term deren Wechselwirkungsenergie darstellt.

Wir wollen die Divergenz des Integrals (5.10) dadurch vermeiden, daß wir sozusagen auf das Bild der Punktladungen verzichten. Stellen wir uns also das Probeteilchen als eine Kugel mit dem Radius "a" vor, wobei a einen Mittelwert über alle Teilchenabstände bedeutet, bis auf welchen sich die Feldteilchen dem Probeteilchen nähern können. Berechnen wir dementsprechend (5.11) für folgende physikalisch naheliegende a-Werte:

1. $a = (e^2/3k_BT) = b_o$ (Mittelwert des Stoßparameters bei welchem eine 90°-Ablenkung zustande kommt, proportional zur Landau-Länge) liefert:

$$\langle \vec{E}^2 \rangle = 12\pi n k_B T \exp\left(-\frac{2\kappa e^2}{3k_BT}\right) + 2\pi n e^2 \kappa \exp\left(-\frac{2\kappa e^2}{3k_BT}\right). \tag{5.12}$$

Aus (5.12) ergibt sich durch Entwicklung der Exponentialfunktion [in kollektiven Plasmen $\alpha^2=(k_BT/e^2n^{1/3})>1$] und Vernachlässigung der Wechselwirkungsenergie

(5.13) $$\frac{\langle\vec{E}^2\rangle}{8\pi}=\frac{3}{2}nk_BT\cdot\left[1+\frac{2e^2\kappa}{3k_BT}\right]^{-1}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Hunger und Larenz /21/.

2. $a=(3/4\pi n)^{1/3}=d$ (Mittlerer Teilchenabstand) führt zu:

(5.14) $$\frac{\langle\vec{E}^2\rangle}{8\pi}=\frac{(4\pi)^{4/3}}{2\cdot3^{4/3}}\cdot e^2n^{4/3}\left[1+\frac{2\cdot3^{4/3}\kappa}{(4\pi n)^{1/3}}\right]^{-1}.$$

Dieser Ausdruck ist proportional zum Quadrat der Holtsmarkschen Normalfeldstärke F_0 (vgl. Abschnitt 2.2)

Die obige Überlegung zeigt, daß zur Beseitigung der Divergenz von $\langle\vec{E}^2\rangle$ die Einführung eines Ausschließungsvolumens der Größenordnung $\frac{4}{3}\pi a^3$ notwendig ist (es genügt eigentlich eine hinreichend kleine Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Teilchenabständen kleiner als a).

Man kann sowohl das mittlere Feldstärkenquadrat als auch das mittlere Potentialquadrat unter Heranziehung der Zweierstoßtheorie durch Mittelung über die Hyperbelbahnen der Teilchen zu bestimmen versuchen. Für $\langle\vec{E}^2\rangle$ ergeben sich bei $r\to0$ divergente Integrale im Falle der anziehenden Wechselwirkung, während bei Abstoßung das Ergebnis

(5.15) $$\langle\vec{E}^2\rangle=4\pi nk_BT$$

erhalten wird.

Bessenrodt /29/ erhält für die mittlere quadratische Feldstärke am Ort eines Teilchens in räumlich homogenen Plasmen mit abstoßender Wechselwirkung, unter Berücksichtigung der Dreiteilchenverteilung, praktisch denselben Ausdruck (5.15).

Im folgenden werden wir uns etwas ausführlicher mit der Bestimmung des mittleren Potentialquadrats beschäftigen.

$\langle\phi^2\rangle$ läßt sich schreiben:

(5.16) $$\langle\phi^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}2\pi nvpdpf(v)dv\frac{e^2dt}{r^2},$$

wobei
p: den Stoßparameter
v: die asymptotische Geschwindigkeit
f(v): die Verteilungsfunktion der asymptotischen Geschwindigkeit (Maxwell-Verteilung) bedeutet.
Unter Verwendung des Flächen- und Energiesatzes

(5.17) $$r^2\dot{\varphi} = pv\,;\quad \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \pm \frac{e^2}{r} = \frac{m}{2}v^2$$

(+ bei Abstoßung, - bei Anziehung)
lassen sich alle Integrationen geschlossen ausführen (siehe Anhang A1) und man erhält für das quasineutrale Plasma:

(5.18) $$\langle \phi^2 \rangle_{\substack{\text{Anz.}\\ \text{Abst.}}} = [4\pi n e^2 k_B T]^{1/2}.$$

Da ϕ gemäß einer Gauß-Verteilung verteilt ist (/30/, /31/, /26/), führt die Hunger-Larenzsche Beziehung $\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{4}{2^2}\langle \phi^4 \rangle = 12\pi n k_B T$ /26/ praktisch wieder zu (5.13).

5.2. Autokorrelationsfunktion und mittlere Korrelationszeit des Mikrofeldes

Die zeitliche Korrelationsfunktion des Mikrofeldes wird üblicherweise als das Verhältnis

(5.19) $$K(\tau) = \frac{\overline{\vec{E}(t_o)\cdot\vec{E}(t_o+\tau)}^{t_o}}{\overline{\vec{E}^2(t_o)}^{t_o}}$$

definiert.
Unter der Annahme, daß sich die Elektronen geradlinig und gleichförmig bewegen, haben Cohen, Spitzer und Routly /13/ folgenden Ausdruck für die Autokorrelationsfunktion des Mikrofeldes hergeleitet:

(5.20) $$\overline{\vec{E}(t_o)\cdot\vec{E}(t_o+\tau)}^{t_o} = \frac{4\pi n e^2}{|\tau||\vec{v}|}.$$

Im Mittel über die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung folgt

(5.21) $$\overline{\vec{E}(t_o)\cdot\vec{E}(t_o+\tau)}^{t_o} = \frac{8\pi^{1/2} n e^2 m^{1/2}}{(2k_B T)^{3/2}|\tau|} .$$

Mit (5.13) führt (5.19) und (5.20) auf die Korrelationsfunktion:

(5.22) $$K_\gamma(\tau, v(\tau)) = \frac{v_{o\gamma}\tau_{o\gamma}}{v\tau} \quad ; \quad \tau_{o\gamma} = \frac{b_o}{v_{o\gamma}} = \frac{e^2 m_\gamma^{1/2}}{(3k_B T)^{3/2}} .$$

(5.23)

Gl. (5.22) gilt sowohl für die Korrelationsfunktion des Elektronenfeldes (γ =e), als auch für die des Ionenfeldes(γ =i)
Die Spitzersche Autokorrelationsfunktion (5.21) divergiert in unphysikalischer Weise für $\tau \to 0$.
Wilke erzielte bei Computersimulationen Versuchsergebnisse /32/, die mit der von Larenz vorgeschlagenen Korrelationsfunktion

(5.24) $$K_\gamma(\tau) = \left[1 + \frac{\tau^2}{\tau_{o\gamma}^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

sehr gut beschrieben werden können, wobei also für $\tau \to 0$ physikalisch zu forderndes Verhalten vorliegt. Gl. (5.24) gilt ebenfalls sowohl für die Elektronen als auch für die Ionen (entsprechend indiziert). Im bewegten Bezugssystem der Elektronen ergibt sich mit (5.24) für die Korrelationsfunktion des Ionenfeldes

(5.25) $$K_i(\tau, v(\tau)) = \left[1 + \frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\left(1 + \frac{v^2}{v_{oi}^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} .$$

Mittelt man (5.25) über die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen, so resultiert (Anhang A2)

(5.26) $$\langle K_i(\tau, v(\tau))\rangle_v = \left[1 + \frac{\tau^2}{\tau_{oe}^2}\right]^{-\frac{1}{2}} ; \quad \tau \leq \tau_{oi} .$$

Die mittlere Korrelationszeit des Ionenfeldes läßt sich als das Zeitintegral der Korrelationsfunktion (5.24) für γ =i angeben

(5.27) $$\tau_i^* = \int_0^{\tau_{max}} \left[1 + \frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right]^{-\frac{1}{2}} d\tau .$$

Führt man für τ_{max}, als Folge der Debye-Abschirmung

(5.28) $$\tau_{max} = \frac{\lambda_D}{v_{oi}} = \frac{m_i^{1/2}}{2e(3\pi n)^{1/2}}$$

ein, um die Divergenz des Integrals (5.27) bei $\tau \to \infty$ zu vermeiden, so folgt:

(5.29) $$\tau_i^* = 0{,}289 \frac{e^2 m_i^{1/2}}{(k_B T)^{3/2}} \ln\left(1{,}419 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right).$$

Mit Hilfe der Korrelationsfunktion (5.24) können wir nun zeigen, daß sich das Ionenfeld während des Zeitintervalls $\langle\tau_k\rangle$ nicht wesentlich ändert, mit anderen Worten, daß die Beziehung (4.3) durchaus gerechtfertigt ist. Wir haben nämlich:

(5.30) $$K(0) = 1,$$

(5.31) $$K\left(\tau = \langle\tau_k\rangle = \sqrt{\frac{6m_e}{\pi m_i}}\tau_i^*\right) = \left[1 + 4{,}31 \frac{m_e}{m_i}\left(\ln\left(1{,}419 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right)\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Werte des Coulomb-Logarithmus sind in der folgenden Tabelle für verschiedene Plasmen zusammengestellt:

$T(K)$ \ $n(cm^{-3})$	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}
10^4	11,35	9,81	8,27	6,74	5,21	3,66
10^5	13,65	12,11	10,57	9,04	7,51	5,96
10^6	15,95	14,41	12,87	11,34	9,81	8,26

Tabelle 1
$\ln(1{,}419\ k_B T/e^2 n^{1/3})$ für verschiedene n, T Werte

Wegen des großen Massenverhältnisses Ion/Elektron weicht (5.31) z. B. für ein typisches Wasserstoffplasma mit $n=10^{12}/cm^3$ und $T=10^4 K$ nur um etwa 5% von 1 ab.

5.3. Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsschwankungen

Für Plasmen im thermodynamischen Gleichgewicht liegt die Annahme nahe, daß die Schwankungen der Geschwindigkeit infolge des Mikrofeldes normal-verteilt sind. Genauer gehen wir davon aus, daß die Längskomponente des Geschwindigkeitsschwankungsvektors Gauß-, während seine Querkomponente wegen der zwei Dimensionen in senkrechter Richtung Rayleigh-verteilt ist

$$p(\Delta v_{\ell\parallel}) = \frac{1}{\pi^{1/2}\omega\Delta v_{\parallel}^{\circ}} e^{-\left(\frac{\Delta v_{\ell\parallel}}{\omega\Delta v_{\parallel}^{\circ}}\right)^2} \tag{5.32}$$

$$p(\Delta v_{\ell\perp}) = \frac{2\Delta v_{\ell\perp}}{(\Delta v_{\perp}^{\circ})^2} e^{-\left(\frac{\Delta v_{\ell\perp}}{\Delta v_{\perp}^{\circ}}\right)^2} . \tag{5.32'}$$

Um die Transportweglänge mit und ohne Längsfeld gleichzeitig diskutieren zu können, erscheint es uns angebracht, den Parameter $\omega \geq 0$ in (5.32) einzuführen. Wir haben schon in der Einleitung darauf hingewiesen, daß die Ablenkung der Elektronen im Ionenfeld, im Rahmen der üblichen Zweierstoßtheorie, keine Energieänderung der Elektronen beinhaltet. Unser Modell reduziert sich auf diesen Grenzfall für den Parameterwert $\omega=0$. $\omega=0$ bedeutet nämlich Vernachlässigung der Geschwindigkeitsschwankungen in Flugrichtung, die Verteilungsfunktion (5.32) geht dann in die δ-Funktion

$$\lim_{\omega\to 0} p(\Delta v_{\ell\parallel}) = \delta(\Delta v_{\ell\parallel}) \tag{5.33}$$

über.

Bei der Bestimmung der beiden Parameter $\Delta v_{\parallel}^{\circ}$ und $\Delta v_{\perp}^{\circ}$ geht man zweckmäßigerweise von der exakten Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Feldstärke (4.2) aus, quadriert und mittelt anschließend über t_o. Damit erhält man:

$$\langle[\vec{v}(t,t_o)-\vec{v}(t_o)]^2\rangle_{t_o} = \frac{e^2\langle\vec{E}^2\rangle}{m_e^2}\int_0^t\int K(t''-t',v(t''-t'))\,dt''dt', \tag{5.34}$$

wobei in (5.34) die Definitionsgleichung der zeitlichen Korrelationsfunktion (5.19) benutzt wurde.

Verwenden wir in (5.34) die Korrelationsfunktion (5.26) und

führen damit die beiden Zeitintegrationen aus, so gelangen wir zu:

$$\langle \Delta\vec{v}^2(t)\rangle = \frac{3}{2}\left(\Delta v_{\parallel}^{o}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\Delta v_{\perp}^{o}\right)^2 = \frac{e^2}{m_e^2}\langle \vec{E}^2\rangle \int_0^t\int_0^{t'}\left[1+\frac{(t''-t')^2}{\tau_{oe}^2}\right]^{-1/2} dt''dt' =$$

(5.35)

$$= \frac{e^2}{m_e^2}\langle \vec{E}^2\rangle t\,\tau_{oe}\left[\ln\frac{\left(1+\frac{\tau_{oe}^2}{t^2}\right)^{1/2}+1}{\left(1+\frac{\tau_{oe}^2}{t^2}\right)^{1/2}-1} - 2\left(1+\frac{\tau_{oe}^2}{t^2}\right)^{1/2} + 2\frac{\tau_{oe}}{t}\right].$$

Die Klammer in (5.35) reduziert sich für $t \gg \tau_{oe}$ auf $2\cdot\ln(2t/\tau_{oe})$.

Bei der Auswertung der Formel (5.35) hat man mehrere Möglichkeiten:

a) Das mittlere Feldstärkenquadrat $\langle \vec{E}^2\rangle$ hängt von dem auf Seite 23 eingeführten Abschneideparameter "a" ab. Wir möchten nur diejenigen Parameterpaare (a,t) als physikalisch zugelassen ansehen, die den Ausdruck $\langle \vec{E}^2\rangle t \propto (t/a) = \text{const} = \nu_{oe}^{-1}$ lassen, wobei also auch der gleichzeitige Grenzübergang $a \to 0$, $t \to 0$ zugelassen werden kann.

b) Man kann in (5.35) zusätzlich innerhalb eines Zeitintervalls T über die Zeit t mitteln. Dieses würde wegen des logarithmisch monotonen Ansteigens des Integranden bis auf Zahlenfaktoren der Größenordnung 1 zum gleichen Ergebnis führen.

c) In den gemäß Modellvorstellung zugrunde gelegten kleinen Ablenkzeitintervallen sollte sich die Feldstärke $\vec{E}$ nicht wesentlich ändern. Unter diesen Umständen könnte natürlich $\vec{E}$ auch durch die über dieses Zeitintervall gemittelte Feldstärke $\overline{\vec{E}(t'+t'')}^{\,0<t''<t}$ ersetzt werden, wobei entsprechend die Mikrofeldverteilung für die über ein Zeitintervall gemittelte Feldstärke zu verwenden wäre. Da diese Feldverteilung ebenfalls eine Gaußverteilung ist, würde statt $\langle \vec{E}^2\rangle\cdot t$ in (5.35) der Ausdruck $\overline{\left(\vec{E}(t'+t'')\right)^2}^{\,0<t''<t}\cdot t$ stehen. Letzteres ist aber genau die dem Spitzerschen Ausdruck $\overline{\vec{E}(\tau)\vec{E}(\tau+t)}^{\tau}\cdot t$ entsprechende von t unabhängige Konstante.

Auf Grund des Auftretens des Produkts $\langle \vec{E}^2\rangle\cdot t$ ist die Verwendung der Korrelationsfunktionen nach Spitzer oder nach Larenz-Wilke hier völlig gleichwertig.

Folgende Tabelle führt die Ergebnisse auf:

a	$t = \frac{a}{v_{oe}}$	$\langle \vec{E}^2 \rangle$	$(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 = (\Delta v_{\perp}^{o})^2$
$\frac{e^2}{3k_B T}$	τ_{oe}	$12\pi n k_B T$	$0{,}869\,\frac{e^6 n}{m_e (k_B T)^2}$
$\left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3}$	$\frac{1}{(4\pi)^{1/3}\cdot 3^{1/6}}\cdot\frac{m_e^{1/2}}{n^{1/3}(k_B T)^{1/2}}$	$\frac{(4\pi)^{4/3}}{3^{1/3}} e^2 n^{4/3}$	$\frac{1{,}863\, e^6 n}{m_e (k_B T)^2}\cdot$ $\cdot \ln(3{,}73 k_B T / e^2 n^{1/3})$

Tabelle 2

Die Parameter $\Delta v_{\parallel}^{o}$ bzw. $\Delta v_{\perp}^{o}$ für verschiedene (a,t)-Kombinationen

6. Herleitung der Transportweglänge

6.1. Integrationen

Unsere Ausgangsgleichung (4.8) läßt sich, unter Verwendung von (4.5), (4.7) bzw. (4.13) und nach Einführung der Verteilungsfunktionen (5.32) bzw. (5.32'), auf folgende Form bringen:

$$l(v)=\sum_{n=1}^{N_{so}^{\circ}}\int_{0}^{\infty}(v+\sum_{k=1}^{n}\Delta v_{k\parallel})\tau_i^{*}\left[1+\frac{1}{v_{oi}^{2}}(v+\sum_{k=1}^{n}\Delta v_{k\parallel})^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}\prod_{p=1}^{n}2e^{-\left(\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_{\perp}^{\circ}}\right)^{2}}\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_{\perp}^{\circ}}\cdot$$

(6.1)

$$\cdot\left[1+\frac{\Delta v_{p\perp}^{2}}{(v+\sum_{k=1}^{n}\Delta v_{k\parallel})^{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot d\left(\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_{\perp}^{\circ}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{l=1}^{n}\pi^{-\frac{1}{2}}\omega^{-1}e^{-\left(\frac{\Delta v_{l\parallel}}{\omega\Delta v_{\parallel}^{\circ}}\right)^{2}}d\left(\frac{\Delta v_{l\parallel}}{\Delta v_{\parallel}^{\circ}}\right).$$

Wir möchten an dieser Stelle auf die komplizierte Verkopplung der Einzelablenkungen hinweisen, die durch die variierende Längskomponente der Geschwindigkeit auftritt und wodurch die Vorgeschichte der Bewegung vor dem k-ten Zeitschritt in die obige Definitionsgleichung eingeht

$$\Delta v_{k\parallel}=\frac{e}{m_e}E_{k\parallel}\tau_i^{*}\left[1+\frac{1}{v_{oi}^{2}}(v+\sum_{l=1}^{k}\Delta v_{l\parallel})^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}=$$

(6.2)

$$=\frac{e}{m_e}E_{k\parallel}\tau_i^{*}\left[1+\frac{1}{v_{oi}^{2}}\left(v+\sum_{l=1}^{k}\frac{e}{m_e}E_{l\parallel}\tau_i^{*}\left[1+\frac{1}{v_{oi}^{2}}(v+\sum_{p=1}^{l}\Delta v_{p\parallel})^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Streng genommen müßte man die in (6.1) auftretenden Parameter $\Delta v_{\perp}^{\circ}$ mit Indizes versehen, da diese Größen, wie wir im Abschnitt 5.3 gezeigt haben, zeitabhängig sind. Wir haben aber aus Gründen der mathematischer Traktabilität schon die Vereinfachung bzw. Näherung $\tau_k(v)=\langle\tau_k(v)\rangle$ vorgenommen, wodurch die Vorgeschichte zwar nicht ganz konsequent in vollem Umfang, aber mindestens doch näherungsweise berücksichtigt wird. Versuche, die Vorgeschichte in einer etwas besseren Näherung zu erfassen, stießen auf sehr große mathematische Schwierigkeiten.

Eine weitere Vereinfachung erreicht man dadurch, daß man die Laufzeit (4.7) näherungsweise durch die Beziehung

(6.3) $$\tau_n = \frac{\tau_i^* v_{oi}}{|v_n|}$$

ersetzt. (6.3) ist sicherlich eine zulässige Näherung, wenn man bedenkt, daß meist $|v_n| \gg v_{oi}$ gilt.
Führen wir zunächst die $\perp$-Integration über $\Delta v_{p\perp}$ in (6.1) aus:

$$2\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_\perp^0}\right)^2}\left[1+\frac{\Delta v_{p\perp}^2}{v_{p\parallel}^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_\perp^0}\,d\left(\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_\perp^0}\right)=$$

(6.4) $$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left|\frac{v_{p\parallel}}{\Delta v_\perp^0}\right|\int_0^\infty e^{-\beta^2\left[\left(\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_\perp^0}\right)^2+\left(\frac{v_{p\parallel}}{\Delta v_\perp^0}\right)^2\right]}d\beta\cdot e^{-\left(\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_\perp^0}\right)^2}\cdot\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_\perp^0}\,d\left(\frac{\Delta v_{p\perp}}{\Delta v_\perp^0}\right)=$$

$$=\pi^{\frac{1}{2}}\left|\frac{v_{p\parallel}}{\Delta v_\perp^0}\right|\cdot e^{\left(\frac{v_{p\parallel}}{\Delta v_\perp^0}\right)^2}\left[1-\Phi\left(\frac{v_{p\parallel}}{\Delta v_\perp^0}\right)\right],$$

wobei $1-\Phi(v_{p\parallel}/\Delta v_\perp^0)$ die komplementäre Fehlerfunktion ist.
Aus der Integraldarstellung der komplementären Fehlerfunktion

(6.5) $$1-\Phi\left(\frac{v_{p\parallel}}{\Delta v_\perp^0}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty e^{-\left(\frac{\beta v_{p\parallel}}{\Delta v_\perp^0}\right)^2}\cdot\frac{v_{p\parallel}}{\Delta v_\perp^0}\,d\beta$$

folgt

(6.6) $$\left\langle\prod_{p=1}^{m}\left\langle\cos\vartheta_p'\right\rangle_{\varphi_p'}\right\rangle=\int_1^\infty\prod_{p=1}^{m}2\frac{\partial}{\partial\alpha_p}(1-\beta_p^2)^{-1}e^{\frac{\alpha_p(1-\beta_p^2)v_{p\parallel}^2}{(\Delta v_\perp^0)^2}}\,d\beta_p$$

mit $\alpha_p=1$ nach Ausführung der Differentiation.
Setzen wir nun (6.6) in (6.1) ein:

(6.7) $$I(v)=\sum_{n=1}^{N_{90°}}v_{oi}\tau_i^*\prod_{p=1}^{m}\int_1^\infty 2\frac{\partial}{\partial\alpha_p}\cdot\frac{d\beta_p}{1-\beta_p^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{\alpha_p(1-\beta_p^2)v_{p\parallel}^2}{(\Delta v_\perp^0)^2}}\cdot\prod_{\ell=1}^{m}\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\left(\frac{\Delta v_{\ell\parallel}}{\omega\Delta v_\parallel^0}\right)^2}\cdot d\left(\frac{\Delta v_{\ell\parallel}}{\omega\Delta v_\parallel^0}\right).$$

Die in (6.7) auftretenden Faltungsintegrale lassen sich Schritt für Schritt berechnen; man fängt z.B. mit der Integration über

$\Delta V_{n\parallel}$ an und integriert sämtliche Schwankungen der Geschwindigkeit in Längsrichtung aus (die β_p-Integration wird erst später ausgeführt).

Betrachten wir also nur die Faltungsintegrale über $\Delta V_{\ell\parallel}$ in (6.7):

$$I = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta V_{1\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}}\right)^2} d\left(\frac{\Delta V_{1\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}}\right) \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta V_{2\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}}\right)^2} d\left(\frac{\Delta V_{2\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}}\right) \cdots$$

(6.8)

$$\cdots \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta V_{p\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}}\right)^2} e^{\frac{\alpha_p (1-\beta_p^2) V_{p\parallel}^2}{(\Delta V_{\parallel}^{0})^2}} d\left(\frac{\Delta V_{p\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}}\right) \cdots \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\Delta V_{n\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}}\right)^2} d\left(\frac{\Delta V_{n\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}}\right).$$

Alle Integrale über $\Delta V_{\ell\parallel}$ von l=p+1 bis l=n sind gleich 1 (Normierungsbedingung der Verteilungsfunktion). Um das p-te Integral auszuführen, setzen wir

$$(6.9) \qquad \frac{V_{p\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}} = x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta V_{p\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}} = x - \frac{V + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta V_{k\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}} = x - a .$$

Damit läßt sich das p-te Integral schreiben:

$$(6.10) \qquad \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2} e^{\alpha_p (1-\beta_p^2) \omega^2 x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\left[1 - \alpha_p (1-\beta_p^2) \omega^2\right]^{1/2}} e^{\frac{\alpha_p (1-\beta_p^2) \omega^2 a^2}{1 - \alpha_p (1-\beta_p^2) \omega^2}} .$$

(6.10) wird jetzt in (6.8) eingesetzt und damit die Integration über $\Delta V_{(p-1)\parallel}$ ausgeführt. Mit der Substitution

$$(6.11) \qquad \frac{V + \sum_{k=1}^{p-2} \Delta V_{k\parallel}}{\omega \Delta V_{\parallel}^{0}} = b \quad ; \; a = y$$

folgt

$$(6.12) \qquad \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{\left[1 - \alpha_p (1-\beta_p^2) \omega^2\right]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-b)^2} e^{\frac{\alpha_p (1-\beta_p^2) \omega^2 y^2}{1 - \alpha_p (1-\beta_p^2) \omega^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{[1-2\alpha_r(1-\beta_r^2)\omega^2]^{1/2}} e^{\frac{\alpha_r(1-\beta_r^2)\omega^2 b^2}{1-2\alpha_r(1-\beta_r^2)\omega^2}} .$$

Alle anderen Gauß-Integrale lassen sich analog berechnen, nach p Schritten erhält man für I

(6.13) $$I = \frac{1}{[1+p\omega^2\alpha_r(\beta_r^2-1)]^{1/2}} e^{-\frac{v^2\alpha_r(\beta_r^2-1)}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2[1+p\alpha_r\omega^2(\beta_r^2-1)]}} .$$

Leiten wir nun (6.13) gemäß (6.7) nach α_p ab:

$$\left[\frac{\partial I}{\partial \alpha_r}\right]_{(\alpha_r=1)} = -\frac{p\omega^2(\beta_r^2-1)}{2[1+p\omega^2(\beta_r^2-1)]^{3/2}} e^{-\frac{v^2(\beta_r^2-1)}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2[1+p\omega^2(\beta_r^2-1)]}}$$

(6.14)

$$- \frac{v^2(\beta_r^2-1)}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2[1+p\omega^2(\beta_r^2-1)]^{5/2}} e^{-\frac{v^2(\beta_r^2-1)}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2[1+p\omega^2(\beta_r^2-1)]}} .$$

Mit (6.14) läßt sich die β_r-Integration geschlossen ausführen (Anhang A3)

$$\int_1^\infty \Bigg[\frac{p\omega^2}{[1+p\omega^2(\beta_r^2-1)]^{3/2}} e^{-\frac{v^2(\beta_r^2-1)}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2[1+p\omega^2(\beta_r^2-1)]}} +$$

$$+ \frac{2v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2[1+p\omega^2(\beta_r^2-1)]^{5/2}} e^{-\frac{v^2(\beta_r^2-1)}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2[1+p\omega^2(\beta_r^2-1)]}} \Bigg] d\beta_r =$$

(6.15)

$$= \frac{\omega^2 p}{\omega^2 p-1} - \frac{\omega p^{1/2}}{\omega^2 p-1} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2\omega^2 p}} + \pi^{1/2} \cdot \frac{v}{\Delta v_{\parallel}^0} \cdot \frac{1}{(\omega^2 p-1)^{3/2}} \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2(\omega^2 p-1)}} \left[j\Phi(-j\frac{v}{\Delta v_{\parallel}^0 \omega p^{1/2}(\omega^2 p-1)^{1/2}}) - j\Phi(-j\frac{v}{\Delta v_{\parallel}^0(\omega^2 p-1)^{1/2}}) \right],$$

wobei $j=(-1)^{1/2}$ (imaginäre Einheit) und

(6.16) $$\Phi(-jx)=\frac{2}{j\pi^{1/2}}\int_0^x e^{p^2}dp$$

die Fehlerfunktion vom imaginären Argument ist.
Kehren wir nun zum Ausdruck (6.7) zurück, der mit (6.15) auf folgende Form gebracht wurde:

(6.17) $$l(v)=v_{oi}\tau_i^*\sum_{n=1}^{N_{90}^\circ}\prod_{p=1}^{n}\left[\frac{\omega^2p}{\omega^2p-1}\right]\left[1-\frac{1}{\omega p^{1/2}}e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{\circ})^2\omega^2p}}+\pi^{1/2}\cdot\frac{v}{\Delta v_{\parallel}^{\circ}}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{1}{\omega^2p(\omega^2p-1)^{1/2}}e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{\circ})^2(\omega^2p-1)}}\left[j\Phi(-j\frac{v}{\Delta v_{\parallel}^{\circ}\omega p^{1/2}(\omega^2p-1)^{1/2}})-j\Phi(-j\frac{v}{\Delta v_{\parallel}^{\circ}(\omega^2p-1)^{1/2}})\right]\right].$$

Dieser Ausdruck möge zunächst im physikalisch wichtigen Grenzfall $\omega=0$ untersucht werden.

6.2. Diskussion der Relaxationslänge ohne Energieaustausch

Im Grenzfall $\omega=0$ bleibt $|\vec{v}|=$ const, die einzelnen Strecken werden innerhalb aller Zeitintervalle mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen. $|\vec{v}|=$ const beinhaltet die Vernachlässigung der Geschwindigkeitsschwankungen in Flugrichtung, es tritt also, wie in der üblichen Zweierstoßtheorie, kein Energieaustausch zwischen dem Test-Elektron und dem Ionenfeld auf. Für $\omega=0$ reduziert sich (6.17) auf

(6.18) $$l(v)=v_{oi}\tau_i^*\sum_{n=1}^{N_{90}^\circ=\infty}\prod_{p=1}^{n}\left\{\pi^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{v}{\Delta v_{\parallel}^{\circ}}e^{\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{\circ})^2}}\left[1-\Phi(\frac{v}{\Delta v_{\parallel}^{\circ}})\right]\right\},$$

in Übereinstimmung mit Gl. (6.4)
Das Produkt und die Summe lassen sich in diesem Fall exakt ausführen und man erhält

(6.19) $$l(v)=v_{oi}\tau_i^*\frac{\pi^{\frac{1}{2}}(v/\Delta v_{\parallel}^{\circ})e^{(v/\Delta v_{\parallel}^{\circ})^2}\cdot[1-\Phi(v/\Delta v_{\parallel}^{\circ})]}{1-\pi^{\frac{1}{2}}(v/\Delta v_{\parallel}^{\circ})e^{(v/\Delta v_{\parallel}^{\circ})^2}\cdot[1-\Phi(v/\Delta v_{\parallel}^{\circ})]}.$$

Für $v > \Delta v_{\parallel}^{0}$ darf die komplementäre Fehlerfunktion in eine asymptotische Reihe entwickelt werden (siehe Anhang A6). Es folgt

$$\frac{l(v)}{v_{oi}\tau_i^*} = \frac{2v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2}\left(1 + \frac{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2}{v^2}\right). \tag{6.20}$$

Für kleine Geschwindigkeiten dagegen ($v < \Delta v_{\parallel}^{0}$) verwendet man die Reihenentwicklung der Fehlerfunktion (Anhang A6) und es ergibt sich

$$\frac{l(v)}{v_{oi}\tau_i^*} = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{v}{\Delta v_{\parallel}^{0}} + (\pi - 2)\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2}. \tag{6.21}$$

Folgende Abbildung zeigt den Verlauf der $l=l(v)$ Kurve für $\omega = 0$ in normierter Form:

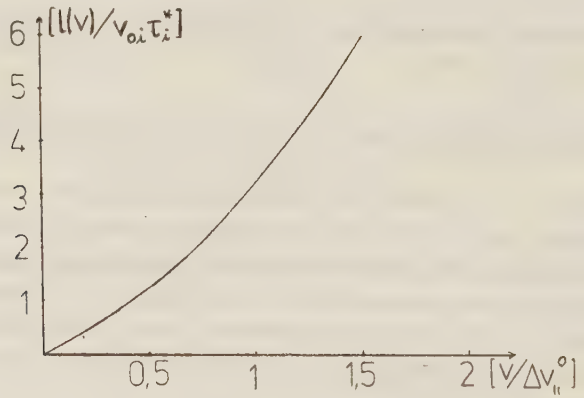


Abbildung 3

Die Relaxationslänge als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit ohne Energieaustausch (in normierter Form)

Führt man in (6.18) die Mittelung über die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung durch (siehe Anhang A4), so ergibt sich

$$\langle l(v)\rangle_v = v_{oi}\tau_i^* \frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2}. \tag{6.22}$$

Die Auswertung der Formel (6.22) erfolgt auf Grund der Gl.(5.29) und der Tabelle 2.

a	$t = \frac{a}{v_{oe}}$	$\langle \vec{E}^2 \rangle$	$(\Delta v_{\parallel}^0)^2 = (\Delta v_{\perp}^0)^2$	$\langle l(v) \rangle \; (\omega = 0)$
$\frac{e^2}{3k_B T}$	τ_{oe}	$12\pi n k_B T$	$\frac{0{,}869 e^6 n}{m_e (k_B T)^2}$	$\frac{1{,}152 (k_B T)^2}{e^4 n} \cdot \ln(1{,}42 k_B T / e^2 n^{\frac{1}{3}})$
$\left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{(4\pi n)^{-\frac{1}{3}}}{3^{1/6}} \left(\frac{m_e}{k_B T}\right)^{\frac{1}{2}}$	$4\pi \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot e^2 n^{4/3}$	$\frac{1{,}863 e^6 n}{m_e (k_B T)^2} \ln(3{,}73 k_B T / e^2 n^{\frac{1}{3}})$	$\frac{0{,}537 (k_B T)^2}{e^4 n} \cdot \frac{\ln(1{,}42 k_B T / e^2 n^{1/3})}{\ln(3{,}73 k_B T / e^2 n^{1/3})}$

Tabelle 3
Relaxationslängen ohne Längsfeld

Ohne Energieaustausch haben wir also, in Übereinstimmung mit der Zweierstoßtheorie, Relaxationslängen mit dem funktionalen Zusammenhang

$$l \sim \frac{k_B^2 T^2}{e^4 n} \tag{6.23}$$

hergeleitet (bis auf den logarithmischen Term).
Die Mittelung über v in (6.18) muß nicht notwendigerweise mit der Maxwell-Verteilung der Plasmateilchen erfolgen. Im weiteren werden wir zeigen, wie sich durch das Heranziehen anderer Verteilungen eine rein kollektive- bzw. eine der Zweierstoßtheorie entsprechende Relaxationslänge herleiten läßt.
Wir mitteln den Ausdruck (6.18) zunächst mit Hilfe der Verteilungsfunktion

$$f = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot v_m \lambda} e^{-\left(\frac{v}{v_m \lambda}\right)^2} \tag{6.24}$$

und erhalten

$$\langle l(v) \rangle_v = v_{oi} \tau_i^* \sum_{n=1}^{N_{gf} \to \infty} \prod_{\mu=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{\Delta v_{\mu}^0}{v_m \lambda}} \cdot \tag{6.25}$$

($v_m^2 = (2k_B T/m)$; λ ein freier Parameter).

Nach Ausführung des Produkts und der Summation in (6.25) ergibt sich die Relaxationslänge

$$l_K = v_{oi}\tau_i^* \frac{v_m \lambda}{\Delta v_{\parallel}^0}. \tag{6.26}$$

Unter Beachtung der Tabelle 2 und der Gl. (5.29) folgt aus (6.26):

$$l = 0{,}759\lambda \frac{(k_B T)^{1/2}}{e n^{1/2}} \ln\left(1{,}419 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right) \qquad (a = b_0), \tag{6.27}$$

$$l = 0{,}519\lambda \frac{(k_B T)^{1/2}}{e n^{1/2}} \cdot \frac{\ln(1{,}419\, k_B T / e^2 n^{1/3})}{[\ln(3{,}73\, k_B T / e^2 n^{1/3})]^{1/2}} \quad (a = d). \tag{6.28}$$

Die so hergestellten Längen entsprechen dem Kontinuumslimes, in Übereinstimmung mit den Aussagen der im Abschnitt 3 durchgeführten Dimensionsbetrachtung. Mit $\lambda > 1$ betragen die Längen (6.27) bzw. (6.28) mehrere Debye-Längen, in Einklang mit dem Gaborschen Ausdruck (2.3).

Einen in gewissem Sinne entgegengesetzten Grenzfall erhält man für Parameterwerte $\lambda \to 0$. Führt man in (6.18) die Geschwindigkeits- Integration mit Hilfe der Verteilungsfunktion

$$\delta(v - v') = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\pi^{1/2} v_m \lambda} e^{-\frac{(v - v')^2}{v_m^2 \lambda^2}} \tag{6.29}$$

aus, so ergibt sich

$$\langle l(v) \rangle_v = v_{oi}\tau_i^* \sum_{n=1}^{N_0^0 \cdots \infty} \prod_{p=1}^{n} \left\{ \pi^{\frac{1}{2}} \frac{v'}{\Delta v_{\parallel}^0} e^{\frac{v'^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{v'}{\Delta v_{\parallel}^0}\right)\right] \right\}. \tag{6.30}$$

Für $v' > \Delta v_{\parallel}^0$ läßt sich die komplementäre Fehlerfunktion in eine asymptotische Reihe entwickeln. Nach Ausführung des Produkts und der Summation folgt

$$l = v_{oi}\tau_i^* \frac{2 v'^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2} \left(1 + \frac{(\Delta v_{\parallel}^0)^2}{v'^2}\right). \tag{6.31}$$

Wählt man nun speziell $v'^2=\frac{1}{3}v_{oe}^2$, so stimmt (6.31) praktisch mit (6.22) überein.

Im nächsten Abschnitt werden wir die Relaxationslänge der Elektronen unter Berücksichtigung der Längsfelder berechnen. Dabei treten Effekte auf, die nicht nur in unserer Modellvorstellung, sondern auch unter anderen Bedingungen zu beobachten sind. Bei der Betrachtung der Ionenbewegung in einem neutralen Gas unter dem Einfluß elektrischer Felder hat sich nämlich gezeigt, daß der Diffusionskoeffizient in Feldrichtung stark modellabhängig ist, während derjenige in Querrichtung nur in höheren Ordnung vom äußeren Feld abhängt /33, 34/.

6.3. Berechnung der Transportweglänge unter Berücksichtigung des Energie- und Impulsaustausches zwischen den Ladungsträgern

Da eine Diskussion der Relaxationslänge als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der Längsfelder ($\omega\neq 0$) schwierig erscheint, ist es an dieser Stelle zweckmäßig, die Mittelung über die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen vorzunehmen. Die im Anhang A4 durchgeführte Maxwell-Integration führt Gl. (6.17) in

$$l=v_{oi}\tau_i^*\sum_{n=1}^{N_{90^\circ}}\prod_{p=1}^{n}\left[\frac{\omega^2 p}{\omega^2 p-1}\right]\left\{\left[1-\frac{3^{3/2}(\Delta v_{11}^0)^3\omega^2 p}{2^{3/2}v_{oe}^3}\cdot\left(1+\frac{3(\Delta v_{11}^0)^2\omega^2 p}{2v_{oe}^2}\right)^{-3/2}\right]\cdot\right.$$

$$\left[1-\left[\omega^2 p\left(1+\frac{3(\Delta v_{11}^0)^2(\omega^2 p-1)}{2v_{oe}^2}\right)\right]^{-1}\right]-\frac{3(\Delta v_{11}^0)^2(\omega^2 p-1)}{v_{oe}^2\omega^2 p}\left(1+\frac{3(\Delta v_{11}^0)^2(\omega^2 p-1)}{2v_{oe}^2}\right)^{-2}\cdot \tag{6.32}$$

$$\left.\cdot\left[1-\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\Delta v_{11}^0}{v_{oe}}\left(1+\frac{3(\Delta v_{11}^0)^2\omega^2 p}{2v_{oe}^2}\right)^{-1/2}\right]\right\}$$

über.

Wir formen den Ausdruck (6.32) noch etwas um, wodurch die für $0<\omega\leq 1$ auftretende scheinbare Divergenz beseitigt und die Ausführung des Produkts erleichtert wird:

$$l = v_{oi} t_i \sum_{n=1}^{N_{90°}} \prod_{p=1}^{m} \left[1 + \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right]\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2 \omega^2 p}{2 v_{oc}^2} - \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2}{2 v_{oe}^2}\right]^{-1} \cdot$$

$$\left\{1 - \frac{3^{3/2}(\Delta v_{\perp}^{0})^3 \omega^2 p}{2^{3/2} v_{oe}^3}\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right]^{-\frac{3}{2}} - \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2}{v_{oc}^2}\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right]^{-1} \cdot\right.$$

(6.33)

$$\cdot\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2} - \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2}{2 v_{oe}^2}\right]^{-1} + \frac{3^{3/2}(\Delta v_{\perp}^{0})^3}{2^{1/2} v_{oe}^3}\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot$$

$$\left.\cdot\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2} - \frac{3(\Delta v_{\perp}^{0})^2}{2 v_{oe}^2}\right]^{-1}\right\} .$$

An dieser Stelle muß auf eine Besonderheit des Ausdrucks (6.33) hingewiesen werden. Da er auch auf für vielleicht harmlos gehaltene Näherungen sehr empflindlich reagiert, empfiehlt es sich, insbesondere bei der Ausführung des Produkts, so genau wie möglich zu rechnen. Wenn man die Terme in den geschweiften Klammern der Reihe nach mit b_p, c_p und d_p, den als Faktor vorgezogenen Term mit a_p bezeichnet, so läßt sich das Produkt über "p" in (6.33) nach folgendem Schema durchführen:

$$\text{(6.34)} \quad \prod_{p=1}^{m} a_p(1 - b_p - c_p + d_p) = e^{\sum_{p=1}^{m} \ln a_p} \cdot e^{\sum_{p=1}^{m} \ln(1 - b_p - c_p + d_p)} .$$

Die ln-Funktionen in (6.34) dürfen entwickelt werden, da sich die Argumente nicht wesentlich von 1 unterscheiden. Wegen $\ln a_p \approx \ln a_{p+1}$ bzw. $\ln(1-b_p-c_p+d_p) \approx \ln(1-b_{p+1}-c_{p+1}+d_{p+1})$ dürfen die beiden Summen in (6.34) durch Integrale ersetzt werden. Die ausführliche Integration ist im Anhang A5 durchgeführt und liefert das Ergebnis:

$$l = v_{oi}\tau_i^* \sum_{n=1}^{n_{30°}\to\infty} \left[\frac{n + \frac{1}{2} + \frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}}{\frac{1}{2} + \frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}} \right]^{\frac{1}{(i)^2}} \cdot e^{-\frac{2}{(i)}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\right)^{1/2}}$$

$$\cdot e^{\frac{2}{\omega}\left(\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\right)^{1/2}} \cdot e^{\frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^3}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\right)^{-1/2}}$$

(6.35)

$$\cdot e^{-\frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\right)^{-1/2}} \cdot e^{\frac{8v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\ln\left[1+\left\{\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\right)^{1/2}\right\}^{-1}\right]}$$

$$\cdot e^{-\frac{8v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\ln\left[1+\left\{\omega\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\right)^{1/2}\right\}^{-1}\right]}.$$

Wenn man in den Argumenten der beiden ln-Funktionen in (6.35) die kleinen Korrekturterme neben 1 vernachlässigt, wird man auf eine Relaxationslänge geführt, die als untere Schranke der in Frage kommenden Längen zu betrachten ist.
Ersetzt man nämlich die Summe in (6.35) näherungsweise durch ein Integral und führt die Substitution

(6.36)
$$\left[n + \frac{1}{2} + \frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{1/2}v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{ii}^{o}\omega}e^{x}$$

ein, so folgt

$$l = v_{oi}\tau_i^* \frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{4\cdot 2^{1/2}v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{ii}^{o}\omega^2}\operatorname{sh}x}\left[\operatorname{ch}\left(2+\frac{2}{\omega^2}\right)x + \operatorname{sh}\left(2+\frac{2}{\omega^2}\right)x\right]dx =$$

(6.37)

$$= v_{oi}\tau_i^* \cdot \frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{ii}^{o})^2\omega^2}\left[S_{0,2+\frac{2}{\omega^2}}\left(\frac{4\cdot 2^{1/2}v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{ii}^{o}\omega^2}\right) + \left(2+\frac{2}{\omega^2}\right)S_{-1,2+\frac{2}{\omega^2}}\left(\frac{4\cdot 2^{1/2}v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{ii}^{o}\omega^2}\right)\right],$$

wobei $S_{0;2+\frac{2}{\omega^2}}\left(\frac{4\cdot\sqrt{2}\,v_{oe}}{\sqrt{3}\cdot\Delta v_{\parallel}^{0}\omega^2}\right)$ die Lommel-Funktionen sind.

Die Lommel-Funktionen $S_{\mu,\nu}(z)$ stellen Lösungen der inhomogenen Besselschen Differentialgleichung

(6.38) $$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-\nu^2)w=z^{\mu+1}$$

für beliebige μ, ν Werte dar. Gl. (6.37) kann als Integraldarstellung der Lommel-Funktionen aufgefaßt werden.
Da für ω der Größenordnung 1 die Argumente der beiden Lommel-Funktionen viel größer als 1 sind, lassen sie sich durch die asymptotischen Reihen (vgl. Anhang A6)

(6.39) $$S_{0,2+\frac{2}{\omega^2}}\left(\frac{4\cdot 2^{1/2}v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{0}\omega^2}\right)\simeq\left(\frac{4\cdot 2^{1/2}v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{0}\omega^2}\right)^{-1}\cdot\left[1-\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^4}{32\,v_{oe}^2}\left(1-\left(2+\frac{2}{\omega^2}\right)^2\right)\right],$$

(6.40) $$S_{-1,2+\frac{2}{\omega^2}}\left(\frac{4\cdot 2^{1/2}v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{0}\omega^2}\right)\simeq\left(\frac{4\cdot 2^{1/2}v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{0}\omega^2}\right)^{-2}\cdot\left[1-\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^4}{32\,v_{oe}^2}\left(4-\left(2+\frac{2}{\omega^2}\right)^2\right)\right]$$

ersetzen, wobei $1+2/\omega^2$ bzw. $2+2/\omega^2$ keine ungeraden ganzen Zahlen sein dürfen.
Mit den Reihen (6.39) und (6.40) reduziert sich (6.37) auf die einfache Formel

(6.41) $$l=v_{oi}\tau_i^{*}\,\frac{v_{oe}}{6^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{0}}\left[1+\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)\cdot\frac{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{0}\omega^2}{2^{3/2}v_{oe}}\right]$$

Folgende Tabelle führt die Ergebnisse auf, die sich durch Auswertung der Formel (6.41) ergeben:

a	$t=\frac{a}{v_{oe}}$	$\langle\vec{E}^2\rangle$	$(\Delta v_{\parallel}^{0})^2=(\Delta v_{\perp}^{0})^2$	$\langle l(v)\rangle_v\,(\omega=1)$
$\frac{e^2}{3k_BT}$	τ_{oe}	$12\pi n k_BT$	$\frac{0{,}869\,e^6n}{m_e(k_BT)^2}$	$\frac{0{,}379(k_BT)^{1/2}}{en^{1/2}}\cdot\ln(1{,}42\,k_BT/e^2n^{\frac{1}{3}})$
$\left[\frac{3}{4\pi n}\right]^{\frac{1}{3}}$	$\frac{(4\pi n)^{-\frac{1}{3}}}{3^{1/6}}\left(\frac{m_e}{k_BT}\right)^{\frac{1}{2}}$	$4\pi\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot e^2n^{\frac{4}{3}}$	$\frac{1{,}863\,e^6n}{m_e(k_BT)^2}\cdot\ln(3{,}73\,k_BT/e^2n^{\frac{1}{3}})$	$\frac{0{,}259(k_BT)^{1/2}}{en^{1/2}}\cdot\frac{\ln(1{,}42\,k_BT/e^2n^{\frac{1}{3}})}{[\ln(3{,}73\,k_BT/e^2n^{1/3})]^{1/2}}$

Tabelle 4
Relaxationslängen mit Längsfeld (untere Schranke).

Die vorstehenden Relaxationslängen sind also proportional zur Debye-Länge und stellen dadurch eine untere Schranke für die Relaxationslänge l dar.
Kehren wir nun nochmal zum Ausdruck (6.35) zurück und nehmen von der Entwicklung der beiden Logarithmen im Exponenten auch noch die linearen Terme mit. Wir erhalten:

$$l = v_{oi}\tau_i^* \sum_{n=1}^{N_{90°}\to\infty} \left[\frac{n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2}}{\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2}} \right]^{\frac{1}{\omega^2}} \cdot e^{-\frac{2}{\omega}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2}\right)^{1/2}}$$

$$\cdot e^{\frac{2}{\omega}\left(\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2}\right)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^3}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2}\right)^{-1/2}} \cdot \tag{6.42}$$

$$\cdot e^{\frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2}\right)^{-1/2}} .$$

Die Summation über n wird wieder näherungsweise ausgeführt und zwar mit der eben skizzierten Methode. Mit der Substitution (6.36) geht Gl. (6.42) in

$$l = v_{oi}\tau_i^* \frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2} e^{\frac{4\cdot 2^{1/2} v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{o}\omega^2}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-\frac{4\cdot 2^{1/2} v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{o}\omega^2}\operatorname{ch}x} \cdot \left[\operatorname{ch}\left(2+\frac{2}{\omega^2}\right)x + \operatorname{sh}\left(2+\frac{2}{\omega^2}\right)x\right] dx = \tag{6.43}$$

$$= v_{oi}\tau_i^* \frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2} e^{\frac{4\cdot 2^{1/2} v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{o}\omega^2}} \cdot K_{2+\frac{2}{\omega^2}}\left(\frac{4\cdot 2^{1/2} v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{o}\omega^2}\right)$$

über.

$K_{2+\frac{2}{\omega^2}}\left(\frac{4\sqrt{2}\,v_{oe}}{\sqrt{3}\,\Delta v_{\parallel}^{o}\omega^2}\right)$ ist die modifizierte Bessel-Funktion, deren Argument für dünne und heiße Plasmen und ω der Größenordnung 1 viel größer als 1 ist. Die asymptotische Reihe (siehe auch Anhang A6)

(6.44)
$$K_{2+\frac{2}{\omega^2}}\left(\frac{4\cdot 2^{1/2}\nu_{oe}}{3^{1/2}\Delta\nu_{\parallel}^{0}\omega^2}\right)\approx\left[\frac{3^{1/2}\pi\Delta\nu_{\parallel}^{0}\omega^2}{8\cdot 2^{1/2}\nu_{oe}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{4\cdot 2^{1/2}\nu_{oe}}{3^{1/2}\Delta\nu_{\parallel}^{0}\omega^2}}\cdot\left[1+\frac{3^{1/2}\Delta\nu_{\parallel}^{0}\omega^2}{8\cdot 2^{1/2}\nu_{oe}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}+\frac{2}{\omega^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\omega^2}\right)}\right].$$

führt uns schließlich auf die Relaxationslänge

(6.45)
$$l=\frac{0{,}925}{\omega}v_{oi}\tau_{\perp}^{*}\left(\frac{\nu_{oe}}{\Delta\nu_{\parallel}^{0}}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{3^{1/2}\Delta\nu_{\parallel}^{0}\omega^2}{8\cdot 2^{1/2}\nu_{oe}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}+\frac{2}{\omega^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\omega^2}\right)}\right].$$

Die Auswertung der Formel (6.45) erfolgt, wie üblich, auf Grund der Gl. (5.29) und der Tabelle 2. Man erkennt, daß die volle Berücksichtigung des Energie- und Impulsaustausches zwischen dem Auf-Elektron und dem Ionenfeld zu herabgesetzten Relaxationslängen geführt hat, denen heraufgesetzte Wirkungsquerschnitte entsprechen.

a	$t=\frac{a}{\nu_{oe}}$	$\langle\vec{E}^2\rangle$	$(\Delta\nu_{\parallel}^{0})^2=(\Delta\nu_{\perp}^{0})^2$	$\langle l(v)\rangle_v\ (\omega=1)$
$\frac{e^2}{3k_BT}$	τ_{oe}	$12\pi nk_BT$	$\frac{0{,}869\,e^6n}{m_e(k_BT)^2}$	$\frac{1{,}17(k_BT)^{5/4}}{e^{5/2}n^{3/4}}\cdot\ln(1{,}42k_BT/e^2n^{\frac{1}{3}})$
$\left[\frac{3}{4\pi n}\right]^{\frac{1}{3}}$	$\frac{(4\pi n)^{-\frac{1}{3}}}{3^{1/6}}\cdot\left(\frac{m_e}{k_BT}\right)^{\frac{1}{2}}$	$4\pi\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\cdot e^2n^{\frac{4}{3}}$	$\frac{1{,}863\,e^6n}{m_e(k_BT)^2}\cdot\ln(3{,}73k_BT/e^2n^{\frac{1}{3}})$	$\frac{0{,}66(k_BT)^{5/4}}{e^{5/2}n^{3/4}}\cdot\frac{\ln(1{,}42k_BT/e^2n^{\frac{1}{3}})}{[\ln(3{,}73k_BT/e^2n^{1/3})]^{\frac{3}{4}}}$

Tabelle 5
Relaxationslängen mit Längsfeld

Der funktionale Zusammenhang der Länge (6.45) stimmt mit dem der Gaborschen Formel (2.2) überein.
Es wurde also eine Transportweglänge hergeleitet, die sich, in Übereinstimmung mit der im Abschnitt 3 durchgeführten Dimensionsbetrachtung, als geometrisches Mittel der beiden Anteile (Zweierstoß und Kontinuumsbeschreibung) darstellen läßt.
Die große Empfindlichkeit des Produkts in (6.33) gegen Näherun-

gen ist auf die besonders wichtige Rolle der Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen (Vorgeschichte) bei der Berechnung der Relaxationslänge im Plasma zurückzuführen. Um diese Behauptung etwas deutlicher zu machen, werden wir im nächsten Abschnitt den Grenzübergang $\omega \to 0$ diskutieren (dieser Grenzübergang ist in (6.45) nicht direkt durchführbar, da sich bei der Herleitung dieser Formel für $\omega \to 0$ unbestimmte Ausdrücke ergeben).

6.4. Diskussion der Relaxationslänge für Parameterwerte $\omega \to 0$

Wir beschränken uns in dieser Diskussion auf solche ω Werte, für die das Produkt $\omega^2 p \leq 1$ bleibt für alle p. Systematische Reihenentwicklung in (6.32) bis auf Terme der Größenordnung $(\Delta v_{\parallel}^0 / v_{oe})^3$ führt uns auf

$$l = v_{oi} \tau_i^* \sum_{n=1}^{N_{90}^* \to \infty} \prod_{p=1}^{n} \left[1 - \frac{3(\Delta v_{\parallel}^0)^2}{2 v_{oe}^2} + \frac{3^{3/2} (\Delta v_{\parallel}^0)^3}{2^{1/2} v_{oe}^3} - \frac{3^{3/2} (\Delta v_{\parallel}^0)^3 \omega^2 p}{2^{3/2} v_{oe}^3} \right]. \tag{6.46}$$

Nach Ausführung des Produkts und der Summation erhält man

$$l = v_{oi} \tau_i^* \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega} \left(\frac{v_{oe}}{\Delta v_{\parallel}^0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3^{1/2} \Delta v_{\parallel}^0}{2^{3/2} \omega^2 v_{oe}} \left(1 - \frac{6^{1/2} \Delta v_{\parallel}^0}{v_{oe}} + \frac{3^{1/2} \Delta v_{\parallel}^0 \omega^2}{2^{3/2} v_{oe}}\right)^2}$$

$$\cdot \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{3^{1/4} (\Delta v_{\parallel}^0)^{1/2}}{2^{3/4} \omega v_{oe}^{1/2}} \left(1 - \frac{6^{1/2} \Delta v_{\parallel}^0}{v_{oe}}\right) + \frac{3^{3/4} \omega (\Delta v_{\parallel}^0)^{3/2}}{2^{5/4} v_{oe}^{3/2}} \right] \right\}. \tag{6.47}$$

Unter der Voraussetzung $\omega < (\Delta v_{\parallel}^0 / v_{oe})^{1/2}$ kann die komplementäre Fehlerfunktion in eine asymptotische Reihe entwickelt werden (siehe Anhang A6) und damit ergibt sich

$$l_{\omega \to 0} \simeq l_z \left(1 + \frac{6^{1/2} \Delta v_{\parallel}^0}{v_{oe}} - \frac{3^{1/2} \Delta v_{\parallel}^0}{2^{1/2} v_{oe}} \omega^2\right). \tag{6.48}$$

Es ist uns also gelungen, die ω-Abhängigkeit der Relaxationslänge im gesamten physikalisch interessanten ω-Bereich zu ermitteln. Die Relaxationslänge weicht für $\omega < (\Delta v_{\parallel}^0 / v_{oe})^{1/2}$ nur geringfügig von der Zweierstoßlänge (6.22) ab. Für $\omega > (\Delta v_{\parallel}^0 / v_{oe})^{1/2}$

dagegen stimmt (6.47) mit der unter Berücksichtigung der Längsfelder hergeleiteten herabgesetzten Länge (6.45) überein. Eine qualitative Veranschaulichung der ω-Abhängigkeit der Relaxationslänge entnimmt man folgender Abbildung:

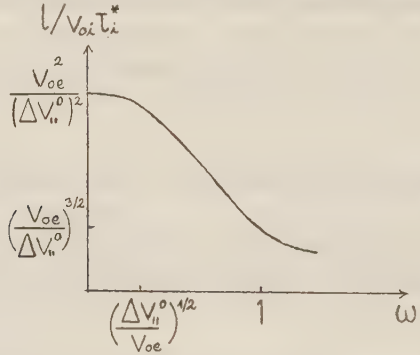


Abbildung 4

Die ω-Abhängigkeit der Relaxationslänge

Für Plasmen im thermischen Gleichgewicht ist natürlich nur der Wert $\omega = 1$ zu verwenden.

7. Herleitung der Relaxationslänge auf Grund der exakten Beziehung zwischen Geschwindigkeit und ablenkendem Feld (kontinuierliche Darstellung)

Im ersten Teil der Arbeit haben wir die Relaxationslänge der Elektronen als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit, an Hand einer Modellvorstellung, durch geeignete Zerlegung der kontinuierlichen Elektronenbahn, hergeleitet. Unsere bisherige Untersuchung beruhte also auf einer diskontinuierlichen Darstellung. In diesem Abschnitt dagegen interessieren wir uns hauptsächlich für die Zeitabhängigkeit der Relaxationslänge, wobei als Ausgangspunkt die exakte Beziehung zwischen Geschwindigkeit und ablenkendem Feld (4.2) verwendet wird (daher die Bezeichnung: kontinuierliche Darstellung). Zweckmäßigerweise geht man von der einfachen kinematischen Beziehung zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegtem Weg $\vec{r}$ aus.

$$\vec{r}(t,t_o)=\int_{t_o}^{t_o+t}\vec{v}(t',t_o)\,dt' \qquad (7.1)$$

Setzt man in (7.1) Gl. (4.2) ein, so folgt für die auf die Anfangsrichtung von $\vec{v}(t_o)$ projizierte Komponente l von $\vec{r}$

$$l(t,t_o)=v(t_o)t+\frac{e}{m_e v(t_o)}\int_{t_o}^{t_o+t}\int_{t_o}^{t_o+t'}\vec{v}(t_o)\cdot\vec{E}(t'',t_o)\,dt''dt', \qquad (7.2)$$

wobei also

$$l=\vec{r}\cdot\frac{\vec{v}}{v} \qquad (7.3)$$

ist. Durch quadrieren von (7.2), Mittelung über t_o und geeignete Verschiebung des Zeitnullpunktes ergibt sich für im Mittel isotrope Felder

$$\overline{[l(t,t_o)-v(t_o)t]^2}^{t_o}=\left[\frac{e}{m_e v(t_o)}\right]^2\int_{t_o}^{t_o+t}dt'\int_{t_o}^{t_o+t'}dt''\int_{t_o}^{t_o+t}ds'\int_{t_o}^{t_o+s'}ds''\,\overline{[\vec{v}(t_o)\cdot\vec{E}(t'',t_o)][\vec{v}(t_o)\cdot\vec{E}(s'',t_o)]}^{t_o}= \qquad (7.4)$$

$$(T'=t'+t_o \text{ etc.})$$

$$=\frac{e^2}{3m_e^2}\int_0^t\int_0^{t'}\int_0^{s'}\overline{\vec{E}(T''+t_o,t_o)\cdot\vec{E}(S''+t_o,t_o)}^{t_o}\,dT''dT'dS'dS''.$$

Gleichung (7.3) führt unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung der zeitlichen Korrelationsfunktion des Mikrofeldes (5.19) hier für das bewegte Elektron auf

$$(7.5)\quad \overline{[l(t,t_0)-v(t_0)t]^2}^{t_0} = \frac{e^2\langle\vec{E}^2\rangle}{3m_e^2}\int_0^{t'}\int_0^{s'}\int_0^{t}\int_0^{t'}\int_0^{s''} K(S''-T'', v(S''-T''))\,dT''dS''dT'dS'.$$

Obwohl die Zeit-Integrationen in (7.5) geschlossen durchführbar sind, können wir mit dem Ergebnis nicht ganz zufrieden sein. Das liegt daran, daß unsere Kenntnisse über die zeitliche Korrelationsfunktion des Mikrofeldes nur im Zeitintervall $0 \leq t \leq \tau_{oi}$ zuverlässig sind. Für große Zeiten ($t > \tau_{oi}$) führt der t^{-1}-Abfall der Korrelationsfunktion zu einer gewissen Unsicherheit. In diesem Sinne liefert die im ersten Teil der Arbeit diskutierte Modellvorstellung doch zuverlässigere Ergebnisse als die vorliegende Darstellung.

Wir benutzen zunächst für die Korrelationsfunktion des Ionenfeldes den für das bewegte Elektron geltenden und über eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung gemittelten Wilkeschen Ausdruck (5.26). Damit reduziert sich (7.5) auf

$$(7.6)\quad \overline{[l(t,t_0)-v(t_0)t]^2}^{t_0} = \frac{2e^2}{9m_e^2}\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}t^3\ln(2t/\tau_{oe})\;;\quad t>\tau_{oe}$$

(vergl. Abschnitt 5.3)

Mit der Bezeichnung

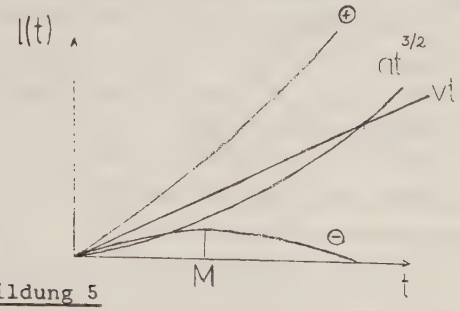
$$(7.7)\qquad \overline{l(t,t_0)}^{t_0} = l(t)$$

bzw. mit der festgehaltenen Anfangsgeschwindigkeit $v(t_0)=v$ folgt

$$(7.8)\qquad l(t) \approx vt \pm \left[\frac{2e^2}{9m_e^2}\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}t^3\ln(2t/\tau_{oe})\right]^{1/2} = vt \pm at^{3/2}.$$

Legt man bei der Bestimmung der Relaxationslänge die Nebenbedingung $\frac{\partial l}{\partial t}=0$ zugrunde, so erübrigt sich das positive Vorzeichen in (7.8) (diese Lösung entspricht einer fortgesetzten Beschleunigung). Das Auftreten der Nullstelle in der Lösung mit dem negativen Vorzeichen charakterisiert das Zeitintervall, nach dessen Ablauf spätestens jede Information über die Anfangsrichtung der Geschwindigkeit verloren gegangen ist.

Das folgende Weg-Zeit-Diagramm versucht Gl. (7.8) qualitativ zu veranschaulichen



M: $\frac{\partial l}{\partial t}=0; \langle\cos\vartheta\rangle=0$

Abbildung 5
Zeitlicher Verlauf der Relaxationslänge

Die Nebenbedingung $\frac{\partial l}{\partial t}=0$ liefert:

(7.9) $$t=\frac{2v^2m_e^2}{e^2\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}\ln(2t/\tau_{oe})},$$

(7.10) $$l=\frac{vt}{3}=\frac{2v^3m_e^2}{3e^2\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}\ln(2t/\tau_{oe})}:$$

Da in (7.10) die Zeit nur im Argument des Logarithmus auftaucht, ist eine genaue Bestimmung derselben nicht unbedingt notwendig. Aus (7.10) ergibt sich die Näherungslösung

(7.11) $$\frac{2t}{\tau_{oe}}\simeq\frac{4v^2m_e^2}{e^2\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}^2}\left[\ln\frac{4v^2m_e^2}{e^2\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}^2}\right]^{-1},$$

die schließlich zur Relaxationslänge

(7.12) $$l=\frac{2v^3m_e^2}{3e^2\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}}\left[\ln\frac{4v^2m_e^2}{e^2\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}^2}-\ln\ln\frac{4v^2m_e^2}{e^2\langle\vec{E}^2\rangle\tau_{oe}^2}\right]^{-1}$$

führt.
Die Länge (7.12) ist also im wesentlichen proportional zur dritten Potenz der Anfangsgeschwindigkeit, während sich bei Spitzer $l\sim v^4$ ergab /35/. Trotzdem liefert unsere Länge (7.12) denselben funktionalen Zusammenhang wie bei Spitzer.

Die Auswertung der Formel (7.12) ergibt nach Durchführung der Maxwell-Integration und bei Zugrundelegung des Hunger-Larenzschen $\langle \vec{E}^2 \rangle$ (siehe Tabelle 2)

$$l = 0{,}19 \frac{(k_B T)^2}{e^4 n} \left[\ln \frac{2{,}05\, k_B T}{e^2 n^{1/3}} \right]^{-1}. \tag{7.13}$$

(7.13) stellt im Vergleich zu der Spitzerschen Länge (2.7) eine um einen Faktor 3,5 herabgesetzte Länge dar.

Gegenüber dem mit (7.6) eingeschlagenen Wege versuchen wir als zweite Möglichkeit, den folgenden Weg zu gehen, der uns die Abhängigkeit der Relaxationslänge von der Anfangsgeschwindigkeit v' in einer vielleicht besseren Näherung zu übersehen gestattet. Wir mitteln (7.5) mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(\vec{v},t|\vec{v}',t=0;\tau') = \frac{1}{\pi^{3/2} v_m^3} \left[1 - e^{-(2t/\tau')} \right]^{-3/2} \cdot e^{-\frac{[\vec{v}-\vec{v}'\exp(-t/\tau')]^2}{v_m^2 [1-\exp(-2t/\tau')]}} \tag{7.14}$$

für die Relaxation der Geschwindigkeitsverteilung, wobei τ' eine mittlere Relaxationszeit darstellt und $v_m^2 = (2k_B T/m_e)$ ist. (7.14) berücksichtigt die Geschwindigkeitsschwankungen in Abhängigkeit von der Zeit t, wobei allerdings als Korrelationsfunktion der Geschwindigkeitsschwankungen die im Exponenten von (7.14) auftauchende Funktion $e^{-t/\tau'}$ als Näherung benutzt wird, weil die wirkliche Geschwindigkeitskorrelationsfunktion, die dort stehen müßte, nicht bekannt ist. Die im übrigen auch als Übergangswahrscheinlichkeit bezeichnete Funktion p nach (7.14) impliziert in Übereinstimmung mit der früheren diskontinuierlichen Beschreibung, daß die Geschwindigkeitsschwankungen Gauß-verteilt sind. p gibt die Wahrscheinlichkeit an, zum Zeitpunkt t eine Geschwindigkeit $\vec{v}$ anzutreffen, wenn zum Zeitpunkt t=0 die Geschwindigkeit $\vec{v}=\vec{v}'$ vorgelegen hat. Für $t \to 0$ reduziert sich (7.14) natürlich auf die δ-Funktion

$$\delta(\vec{v}-\vec{v}') = \lim_{l \to 0} \frac{1}{\pi^{3/2} v_m^3 l^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{v}-\vec{v}')^2}{v_m^2 l}}, \tag{7.15}$$

während $p(v,t|v',t=0;\tau')$ für $t \to \infty$ in die Maxwell-Verteilung

(7.16) $$p(\vec{v}) = \left[\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right]^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}}$$

übergeht, wie es sein muß.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion (7.14) erinnert an die bekannte Ornstein-Uhlenbeck-Lösung der Fokker-Planck-Gleichung im Falle der Brownschen Bewegung /36/.

An der Stelle der Geschwindigkeitskorrelationsfunktion $e^{-t/\tau'}$ müßte, wie bereits gesagt, eine Funktion stehen, die mit Hilfe von l(v) im Prinzip erst berechnet werden sollte. Als physikalische Korrelationsfunktion müßte dabei ein Verhalten $1-\frac{\tau^2}{\tau'^2}$ für $\tau < \tau'$ vorliegen. Für dieses Problem sind aber die kleinen Zeiten nicht von Interesse, vielmehr kommt es wiederum auf den Abfall für große Zeiten an, über den bisher wenig bekannt ist.

Wir haben also in (7.5) folgende Integrationen durchzuführen:

(7.17) $$\int_0^{t'} \int_0^{s'} \int_0^{t} K(S''-T'', v(S''-T''))\, p(\vec{v}, (S''-T') | \vec{v}', t=0; \tau')\, dT''dS''dT'dS'd\vec{v}$$

Mit

(7.18) $$K(S''-T'', v(S''-T'')) = \left[1+\frac{(S''-T'')^2}{\tau_{oi}^2}\left(1+\frac{v^2(S''-T'')}{v_{oi}^2}\right)\right]^{-1} \simeq \frac{v_{oi}\tau_{oi}}{|S''-T''|\, v(S''-T'')}$$

geht nun (7.17) in

(7.19) $$\frac{v_{oi}\tau_{oi}}{\pi^{3/2} v_m^3} \int_0^{t'} \int_0^{s'} \int_0^{t} dT''dS''dT'dS' |S''-T''|^{-1} \left[1-e^{-(2(S''-T'')/\tau')}\right]^{-3/2} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} 2\pi \sin\vartheta \cdot v \cdot e^{-\frac{[v-v'\exp(-(S''-T'')/\tau')]^2}{v_m^2[1-\exp(-2(S''-T'')/\tau')]}} \cdot dv$$

über.

Die ϑ- und v-Integration wird durch Einführung von Kugelkoordinaten im Geschwindigkeitsraum wesentlich vereinfacht. Mit $\vec{v}.\vec{v}' = vv'\cos\vartheta$ führen wir die ϑ- und anschließend die v-Integration aus. (7.19) reduziert sich dann auf

(7.20) $$\tau_{oe} \int_0^{t'} \int_0^{s'} \int_0^{t} \frac{1}{|S''-T''|} e^{\frac{(S''-T'')}{\tau'}} \cdot \Phi\left(\frac{v'\exp(-(S''-T'')/\tau')}{v_m[1-\exp(-2(S''-T'')/\tau')]^{1/2}}\right) dT''dS''dT'dS'$$

Wir beschränken uns im folgenden auf Anfangsgeschwindigkeiten $v' \geqslant v_{oe}$, um die Fehlerfunktion in (7.20) für beliebige Zeitdifferenzen $|S''-T''| \leq \tau'$ in eine asymptotische Reihe entwickeln zu können. Mit $\phi \simeq 1$ lassen sich die Zeitintegrationen geschlossen ausführen und man erhält

$$\tau_{oe} \int_0^{t's'tt} \int\int\int e^{\frac{S''-T''}{\tau'}} |S''-T''|^{-1} dT'' dS'' dT dS' \simeq \frac{2t^4 \tau_{oe}}{\tau'} , \tag{7.21}$$

wobei für die Differenz zweier Exponentialintegral-Funktionen die Reihenentwicklung

$$Ei(x)-Ei(-x) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)(2k+1)!} \quad (x>0) \tag{7.22}$$

benutzt wurde.
Setzt man dieses Resultat in (7.5) ein, so erhält man für die Relaxationslänge jetzt gegenüber (7.8)

$$l(t) = v't - \frac{2^{1/2} e t^2}{3^{1/2} m_e} \sqrt{\langle \vec{E}^2 \rangle \frac{\tau_{oe}}{\tau'}} . \tag{7.23}$$

Mit der schon bekannten Nebenbedingung $(\partial l/\partial t)=0$ ergibt sich dann

$$t = \frac{3^{1/2} v' m_e \tau'^{1/2}}{2 \cdot 2^{1/2} e (\langle \vec{E}^2 \rangle \cdot \tau_{oe})^{1/2}} , \tag{7.24}$$

$$l(v',\tau') = \frac{3^{1/2} v'^2 m_e \tau'^{1/2}}{4 \cdot 2^{1/2} e (\langle \vec{E}^2 \rangle \cdot \tau_{oe})^{1/2}} . \tag{7.25}$$

Es ist naheliegend, die Relaxationszeit τ' durch das Verhältnis $1/v'$ zu ersetzen, wodurch (7.25) in

$$l(v') = \frac{3 v'^3 m_e^2}{32 e^2 \langle \vec{E}^2 \rangle \tau_{oe}} \tag{7.26}$$

übergeht. Wählt man nun für v' speziell die mittlere thermische Geschwindigkeit v_{oe}, so ergibt sich schließlich die Relaxations-

länge

(7.27) $$l = \frac{27 k_B^2 T^2}{128 \pi e^4 n} .$$

Die Benutzung der bedingten Wahrscheinlichkeit (7.14) hat also zu keiner wesentlichen Änderung der Relaxationslänge (7.27) gegenüber (7.13) geführt.

8. Diskussion der Ergebnisse

In diesem Abschnitt wollen wir die verschiedenen Relaxationslängen untereinander und mit Experimenten vergleichen. Wir beschränken uns allerdings auf die im Abschnitt 6 hergeleiteten Längen.
In dem für die Astrophysik und Weltraumforschung interessanten Dichte- und Temperaturbereich, wo die Hauptvoraussetzung unserer Theorie - viele Teilchen innerhalb einer Debye-Kugel - erfüllt ist, liegen eigentlich keine Messungen für Transportkoeffizienten vor. Die Messungen beziehen sich meistens auf solche (n,T)-Werte von Laborplasmen, die an der Grenze des Gültigkeitsbereichs unserer Theorie liegen. Deswegen darf den hier vorgenommenen Vergleichen keine übermäßig große Bedeutung beigemessen werden.
Die Abbildungen 6 und 7 zeigen Relaxationslängen für ein Wasserstoffplasma bei $p=1{,}014 \cdot 10^5$ Pa (1 atm) bzw. $p=1{,}014$ Pa (10^{-5} atm) Elektronendruck (siehe Seite 55 und 56).
Für Plasmen bei Atmosphärendruck liegen sowohl die Spitzerschen Werte, als auch die Meßwerte von Maecker, Peters, Schenk /37/ zwischen den beiden Geraden l_{b_∞} und l_d. Hier stimmen die Längen l_{b_∞} und l_{Sp}^{+} überein, l_L und l_d weichen nur unwesentlich voneinander ab. l_{Sp} ist in diesem Dichte- und Temperaturbereich etwa um einen Faktor 3 größer als l_d.
Für Niederdruckplasmen dagegen, wo das Argument des Coulomb-Logarithmus wesentlich größer als 1 ist, liegen die Verhältnisse ganz anders. In diesem Dichte- und Temperaturbereich ist l_{b_∞} etwa um einen Faktor 2 kleiner als l_{Sp}, l_d liegt noch deutlicher unterhalb von l_{Sp}.
Die Abweichung wird für sehr heiße und dünne Plasmen besonders groß (z.B. im astrophysikalischen Bereich).
Vergleicht man l_{Sp} und l_d beispielsweise für die mittlere Sonnenkorona ($n=10^6/cm^3$; $T=10^6$ K), so ergeben sich folgende Zahlenwerte (mit $R_\odot$ als Sonnenradius):

(8.1) $$l_{Sp} = 1{,}63 \cdot 10^{10}\,cm \approx \frac{R_\odot}{4},$$

(8.2) $$l_d = 3{,}60 \cdot 10^{6}\,cm\,.$$

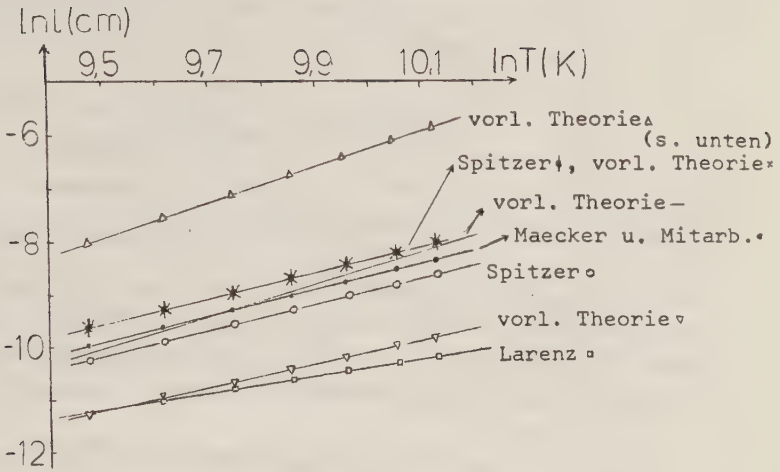


Abbildung 6

Relaxationslängen für ein Wasserstoffplasma bei $p=1{,}014.10^5$ Pa

△: Relaxationslänge ohne Längsfeld, Abschneideparameter Landau-Länge (Bezeichnung $l_{b_o}^+$)

–: Relaxationslänge ohne Längsfeld, Abschneideparameter mittlerer Teilchenabstand (l_d^+)

×: Relaxationslänge mit Längsfeld, Abschneideparameter Landau-Länge (l_{b_o})

▽: Relaxationslänge mit Längsfeld, Abschneideparameter mittlerer Teilchenabstand (l_d)

○: Spitzersche Relaxationslänge (2.7) } /13/ bzw. /14/

∔: Spitzersche Relaxationslänge (2.8) }

▫: Larenzsche Relaxationslänge (2.4)

•: Experiment Maecker, Peters, Schenk (Elektron-Ion-Anteil) /37/

Für die Sonnenkorona sollte man aber wegen der dort erkennbaren Strukturen, deren Dimensionen deutlich unter R_0 liegen, Relaxationslängen erwarten, die viel kleiner als R_0 sind.

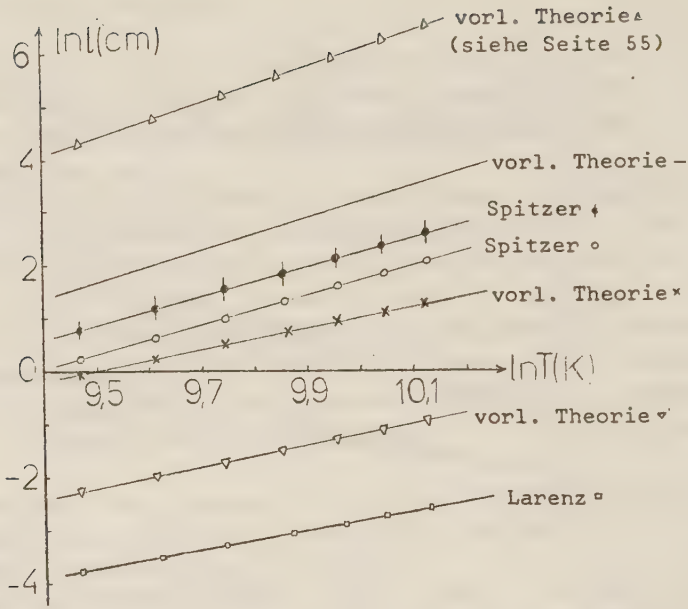


Abbildung 7

Relaxationslängen für ein Wasserstoffplasma bei p=1,014 Pa

Bekanntlich enthält die Radiofrequenzstrahlung der Sonne im Meterwellenbereich neben der thermischen Komponente einen aus vielen kurzen Einzelimpulsen zusammengesetzten überthermischen Anteil, der weitgehend durch Elektronenschwingungen in der Sonnenkorona entsteht. Es ist naheliegend, die Elektronenschwingungen in der Sonnenkorona auf Stoßwellen zurückzuführen /38/. Für die Breite des Anfachungsgebiets, die mindestens um einen Faktor 10 größer ist als die mittlere freie Weglänge für Elektronen, ergeben sich mit (8.1) etwa $2{,}5R_0$. Andererseits betragen die gemessenen Bandbreiten bei den sog. Bursts vom Typ II nur etwa 3-5% der Plasmafrequenz. Da die Teilchendichte innerhalb der Strahlungsquelle annähernd konstant bleiben sollte - sonst würden sich nämlich stark veränderte Bandbreiten ergeben - scheint die Spitzersche Länge (8.1) für die Sonnenkorona viel zu große Zahlenwerte zu liefern. Dagegen ist die herabgesetzte Länge (8.2) um einen Faktor 10^4 kleiner und dadurch wesentlich plausibler (siehe dazu auch /8/).

Im folgenden werden wir uns etwas ausführlicher mit der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit beschäftigen.
Die elektrische Leitfähigkeit läßt sich nach Einsetzen der Längen l_{b_o} bzw. l_d in (2.6) wie folgt schreiben:

$$\sigma_{b_o} = 0{,}675 \frac{(k_B T)^{3/4} n^{1/4}}{e^{1/2} m_e^{1/2}} \ln\left[1{,}419 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right], \tag{8.3}$$

$$\sigma_d = 0{,}381 \frac{(k_B T)^{3/4} n^{1/4}}{e^{1/2} m_e^{1/2}} \ln\left[1{,}419 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right]\left\{\ln\left[3{,}730 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right]\right\}^{-3/4}. \tag{8.4}$$

In den letzten Jahren sind eine Reihe von experimentellen Arbeiten erschienen, die die Überprüfung der theoretischen Ausdrücke für elektrische und thermische Leitfähigkeit in einem breiten Temperaturbereich bis zur Vollionisierung ermöglicht haben.
Abbildung 8 zeigt die elektrische Leitfähigkeit eines Wasserstoffplasmas im Temperaturbereich $1{,}0.10^4$-$1{,}3.10^4$ K und bei $p=1{,}014.10^5$ Pa. Aufgetragen sind die theoretischen $\sigma(T)$-Kurven von Spitzer (2.5), die vorliegende Theorie (8.4), sowie die Meßwerte von Morris, Rudis, Yos /39/.

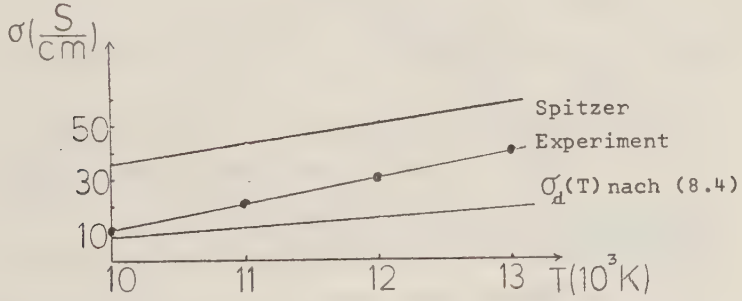


Abbildung 8
Die elektrische Leitfähigkeit eines Wasserstoffplasmas bei $p=1{,}014.10^5$ Pa (σ_d nach (8.4))

Folgende Abbildung zeigt ebenfalls $\sigma(T)$-Kurven, diesmal aber in einem weiteren Temperaturbereich.

Bei der Betrachtung der elektrischen Leitfähigkeit sind wir davon ausgegangen, daß in niedrigster Näherung $\sigma \sim 1$ ist. Das hängt damit zusammen, daß zur Herleitung der Gl. (2.6) lediglich der kugelsymmetrische Anteil der Verteilungsfunktion benutzt wurde, wie in den gängigen Theorien bei schwachen $\vec{E}$-Feldern die Verteilungsfunktion f_o allein maßgeblich ist.
Die elektrischen Leitfähigkeitswerte, die unsere Theorie geliefert hat, stimmen also für Plasmen bei Atmosphärendruck mindestens größenordnungsmäßig mit den betrachteten Meßergebnissen und mit anderen Theorien überein. Eine bessere Übereinstimmung ist schon deswegen nicht zu erwarten, weil unsere Modellrechnung die bei niedrigen Temperaturen wichtigen Ionisations- und Anregungsprozesse nicht berücksichtigt.

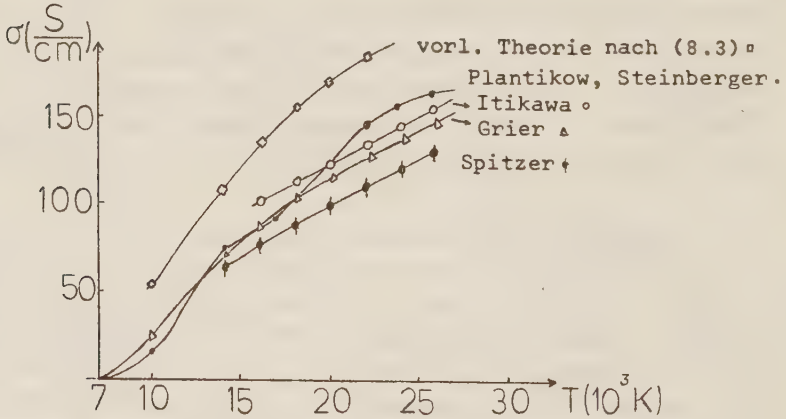


Abbildung 9

$\sigma(T)$-Kurven für ein Wasserstoffplasma bei $p=1{,}014.10^5$ Pa

▫ : $\sigma_{b_o}(T)$ nach (8.3)
∘ : Theorie Itikawa
• : Messungen Plantikow und Steinberger } siehe z.B. /40/
▵ : Theorie Grier
∔ : Theorie Spitzer und Mitarbeiter /13/ bzw. /14/

Schon auf Grund der elementaren kinetischen Gastheorie läßt sich zeigen, daß analog zur elektrischen Leitfähigkeit auch die thermische Leitfähigkeit proportional zur mittleren freien Weglänge ist. Es gilt nämlich

(8.5) $$\kappa = \frac{C_V v_{oe}}{4Q},$$

wobei
$C_V = 1{,}5 k_B$ die spezifische Wärme pro Teilchen bei konstantem Volumen und
Q den Wirkungsquerschnitt der Ionen gegenüber Elektronenstoß darstellt.
Wegen $Q \sim (l.n)^{-1}$ folgt $\kappa \sim l$.
Das Wiedemann-Franz-Gesetz liefert für κ (siehe z.B. /41/)

(8.6) $$\kappa = \frac{\pi^2 k_B (k_B T)^{1/2} n l}{3^{3/2} m_e^{1/2}}$$

Damit ergibt sich

(8.7) $$\kappa_{b_a} = 2{,}222 \frac{k_B (k_B T)^{7/4} n^{1/4}}{m_e^{1/2} e^{5/2}} \ln\left(1{,}419 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right),$$

(8.8) $$\kappa_d = 1{,}253 \frac{k_B (k_B T)^{7/4} n^{1/4}}{m_e^{1/2} e^{5/2}} \ln\left(1{,}419 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right)\left[\ln\left(3{,}730 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right)\right]^{-3/4}.$$

Zum Vergleich sei noch der entsprechende Spitzersche Ausdruck für vollionisierte Plasmen angegeben

(8.9) $$\kappa_{Sp} = 1{,}524 \frac{k_B (k_B T)^{5/2}}{m_e^{1/2} e^4} \left[\ln\left(0{,}712 \frac{k_B T}{e^2 n^{1/3}}\right)\right]^{-1}.$$

Die Wärmeleitfähigkeit in Plasmen setzt sich im wesentlichen aus zwei Anteilen zusammen : der Translationsanteil enthält den Beitrag der Elektronen, Ionen und Atome zum Wärmetransport, während der Ionisationsanteil durch die ambipolare Diffusion der Elektronen-Ionen-Paare hervorgerufen wird.
Abbildung 10 zeigt $\kappa(T)$-Kurven für ein Wasserstoffplasma bei $p = 1{,}014 . 10^5$ Pa.

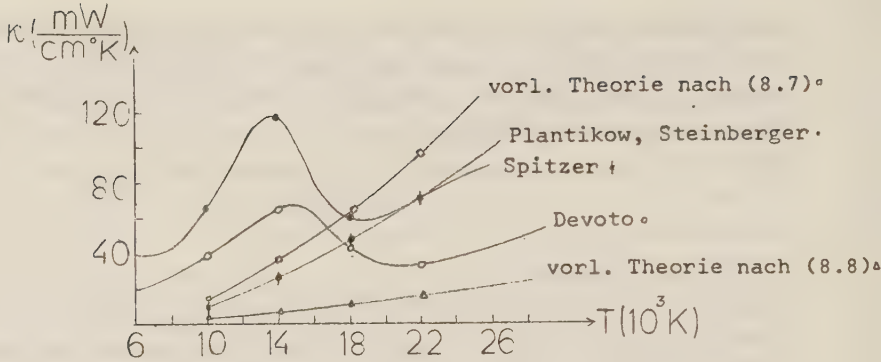


Abbildung 10

Thermische Leitfähigkeit eines Wasserstoffplasmas bei $p=1{,}014.10^5$ Pa

•: Messung Plantikow und Steinberger /40/

∘: Theorie Devoto /42/

†: Theorie Spitzer (8.9)

▫: Vorliegende Theorie nach (8.7)

▵: Vorliegende Theorie nach (8.8)

Das Maximum der Devoto- bzw. Plantikow-Steinberger-Kurven läßt sich auf die um 14000 K dominierende Ionisationswärmeleitfähigkeit zurückführen.

Oberhalb 20000 K wird die Wärmeleitfähigkeit eines vollionisierten Plasmas durch den Translationsanteil der Elektronen und Ionen bestimmt, wobei den Hauptbeitrag, wegen ihrer geringen Masse, die Elektronen tragen. In diesem Bereich nähert sich die Spitzersche bzw. unsere $\kappa(T)$-Kurve (κ_{b_0}) den Messungen.

9. Zusammenfassung

Abweichend von den bisherigen Untersuchungen, die auf nachträglich mit Korrekturen versehenen Zweierstoßmethoden beruhten, wird in der vorliegenden Arbeit die Relaxationslänge der Elektronen in heißen und dünnen, isotropen Gleichgewichtsplasmen mit Hilfe einer geeigneten Modellvorstellung auf kollektiver Basis neu zu berechnen versucht. Der Ionisationsgrad der betrachteten Plasmen muß lediglich die Bedingung erfüllen, daß der effektive Wirkungsquerschnitt der geladenen Teilchen denjenigen der Neutralteilchen wesentlich übertrifft.
Wir betrachten die Ablenkung des Auf-Elektrons im rheonomen Feld des umgebenden Ionen-Kollektivs, welches Impuls- und Energieaustausch mit der Umgebung zuläßt und führen eine geeignete Zerlegung der kontinuierlichen Elektronenbahn durch (diskontinuierliche Darstellung). Die Wechselwirkung der Elektronen untereinander führt praktisch zum Austausch ihrer Plätze innerhalb der Elektronenenergieverteilung. Als Ausgangspunkt der rein statistischen Untersuchung sind die Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeitsschwankungen infolge des Mikrofeldes zu betrachten, für die eine Gauß-Verteilung (in Längsrichtung) bzw. eine Rayleigh-Verteilung (senkrecht darauf) eingesetzt wird.
Zur Bestimmung der Parameter der beiden Verteilungsfunktionen benötigt man das mittlere Feldstärkenquadrat des Mikrofeldes. Zahlreiche Autoren (/27/, /28/) vertreten die Meinung, daß $\langle\vec{E}^2\rangle$ für ein System von Punktladungen divergieren muß. Sie berechnen $\langle\vec{E}^2\rangle$ für ein System von unkorrelierten, sog. "Dressed-Particles", die aber als Quelle des abgeschirmten Coulomb-Feldes zu betrachten sind. Unter Einführung eines geeigneten Abschneideparameters "a", um die Divergenz von $\langle\vec{E}^2\rangle$ zu vermeiden, unterscheidet man zwei physikalisch wichtige Fälle:
1. Für $a=b_o=e^2/(3k_BT)$ (kleinster Stoßparameter, bei welchem eine 90^o-Ablenkung zustande kommt; proportional zur Landau-Länge) folgt, daß $\langle\vec{E}^2\rangle\sim nk_BT$ ist, in Übereinstimmung mit dem Hunger-Larenzschen Ergebnis /21/.
2. Wählt man andererseits $a=d=(3/4\pi n)^{1/3}$ (mittlerer Teilchenabstand), so ergibt sich $\langle\vec{E}^2\rangle\sim e^2n^{4/3}$, daß also das mittlere

Feldstärkenquadrat proportional zum Quadrat der bekannten Holtsmarkschen Normalfeldstärke F_o ist /23/.
Letzteres ist übrigens ein Feld, das auch aus der Zeitmittelung des Hunger-Larenz-Feldes mit $t=d/\bar{v}$ hergeleitet werden kann.
Mit Hilfe der Larenz-Wilkeschen Korrelationsfunktion des Mikrofeldes /32/ läßt sich die mittlere Korrelationszeit des Ionenfeldes angeben.
Bei der Berechnung der Parameter der beiden Verteilungsfunktionen tritt noch ein Abschneideparameter t auf. Da das Produkt $\langle\vec{E}^2\rangle t=\text{const}$ bleiben muß, ergibt sich sofort ein Kriterium für die Auswahl des physikalisch zugelassenen Abschneideparameterpaares (a,t).
Zweckmäßigerweise spaltet man das zeitabhängige Ionenfeld, in dem sich das Auf-Elektron bewegt, in Längs- und Querkomponenten bezüglich der momentanen Elektronengeschwindigkeitsrichtung auf. Im Grenzfall vernachlässigter Längskomponenten liefert das Modell die bekannte Relaxationslänge der Zweierstoßtheorie, die wegen des großen Massenverhältnisses Ion/Elektron praktisch keinen Energieaustausch beinhaltet. Die kollektive Wechselwirkung kommt hier lediglich im Coulomb-Logarithmus zum Ausdruck.
Betrachtet man dagegen das Plasma als eine Flüssigkeit, geht man also zur Kontinuumsbeschreibung über, so läßt sich schon mit Hilfe einer einfachen Dimensionsanalysis zeigen, daß die einzige Länge, die im Kontinuumslimes endlich bleibt, proportional zur Debye-Länge sein muß.
Im allgemeinen Fall, unter Berücksichtigung des Energie- und Impulsaustausches zwischen dem Auf-Elektron und dem Ionenfeld, erreicht man herabgesetzte Relaxationslängen, denen heraufgesetzte Wirkungsquerschnitte entsprechen. Diese Länge läßt sich als geometrisches Mittel der beiden Anteile (Zweierstoß und Kontinuumslimes) darstellen und führt auf Ausdrücke, die ähnlich den von Gabor angegebenen sind.

Im letzten Teil der Arbeit wird die Relaxationslänge auf Grund der exakten Beziehung zwischen Geschwindigkeit und ablenkendem Feld unter Zugrundelegung zweier verschiedener Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitsmittelung der Korrelationsfunktion

des Mikrofeldes näherungsweise studiert. Hier tritt die Schwierigkeit auf, daß für große Zeiten die Korrelationsfunktion des Mikrofeldes und die Geschwindigkeitskorrelationsfunktion nicht genau bekannt sind.

In der kontinuierlichen Darstellung resultieren Relaxationslängen mit dem Spitzerschen funktionalen Zusammenhang, aber mit herabgesetzten Zahlenfaktoren.

Die herabgesetzten Relaxationslängen scheinen insbesondere für sehr dünne und heiße Plasmen (z.B. im astrophysikalischen Bereich) plausiblere Zahlenwerte als die Spitzersche Länge zu liefern.

Bemerkungen, die sich in der Literatur verstreut finden, deuten darauf hin, daß die bisher benutzten Relaxationslängen unter Weltraumbedingungen als eigentlich zu groß empfunden werden. Insbesondere zeigt Welly /38/ in seiner Untersuchung, indem er radioastronomisch beobachtbare Elektronenplasmaschwingungen in der Sonnenkorona auf Anfachung durch Stoßwellen zurückführt, daß die binäre mittlere freie Weglänge herabgesetzt werden muß, um die räumliche Ausdehnung des Anfachungsgebietes mit den Beobachtungsergebnissen in Einklang bringen zu können.

10. Anhang

A1. Herleitung des mittleren Potentialquadrats $\langle\phi^2\rangle$ durch Mittelung über die Hyperbelbahnen der Teilchen

In der Definitionsgleichung (5.16) ersetzen wir die t-Integration durch eine Integration über r via

(A1.1) $$dt = \frac{dr}{\dot{r}},$$

wobei $\dot{r}$ aus dem Flächen- bzw. Energiesatz (5.17) gewonnen wird (Bewegung in einem Zentralfeld):

(A1.2) $$\dot{r} = \left[v^2 \mp \frac{2e^2}{m_e r} - \frac{p^2 v^2}{r^2}\right]^{1/2}.$$

Das - Zeichen in (A1.2) bezieht sich auf die Abstoßung, während das + Zeichen im Falle der anziehenden Wechselwirkung verwendet wird.
Mit (A1.1) und (A1.2) führen wir zunächst die p-Integration in Gl. (5.16) aus

$$\langle\phi^2\rangle = 4\pi n e^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\infty v f(v)\, dv \frac{r}{2v} \int_0^{p_{max}} \left[\left(v^2 \mp \frac{2e^2}{m_e r}\right)\frac{r^2}{v^2} - p^2\right]^{-\frac{1}{2}} dp^2 =$$

(A1.3)

$$= 4\pi n e^2 \int_0^\infty dr \int_0^\infty \frac{f(v)}{v^2} \sqrt{v^2 \mp \frac{2e^2}{m_e r}}^2 d\sqrt{v^2 \mp \frac{2e^2}{m_e r}}.$$

p_{max} bedeutet die positive Wurzel des Radikanden in (A1.3).
Bei Zugrundelegung der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung läßt sich die v-Integration in (A1.3) geschlossen ausführen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Abstoßung

Unter der Bedingung $v^2 - 2e^2/(m_e r) \geq 0$ führen wir die Maxwell-Integration in (A1.3) aus und erhalten

$$\text{(A1.4)} \qquad \langle\phi^2\rangle = 4\pi n e^2 \int_0^\infty e^{-\frac{e^2}{k_B T r}} dr .$$

Da außerhalb einer Debye-Kugel die Mikrofeldwirkungen praktisch abgeschirmt werden, läßt sich als obere Integrationsgrenze in (A1.4) $r=\lambda_D$ wählen, um die Divergenz des Integrals für große Abstände zu vermeiden. Damit ergibt sich nach Ausführung der r-Integration:

$$\langle\phi^2\rangle_{Abst.} = 4\pi n e^2 \left[\lambda_D \exp\left(-\frac{e^2}{k_B T \lambda_D}\right) + \frac{e^2}{k_B T} Ei\left(-\frac{e^2}{k_B T \lambda_D}\right)\right] \simeq$$

(A1.5)

$$\simeq \sqrt{4\pi n e^2 k_B T}$$

mit $Ei(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ (Exponentialintegral)

2. Anziehung

Diesmal dürfen wir über alle Geschwindigkeiten integrieren und erhalten aus (A1.3)

$$\text{(A1.6)} \quad \langle\phi^2\rangle = 4\pi n e^2 \left\{ \int_0^\infty e^{\frac{e^2}{k_B T r}} \left[1 - \phi\left(\frac{e}{(k_B T r)^{1/2}}\right)\right] dr + \frac{2e}{(\pi k_B T)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{dr}{r^{1/2}} \right\}.$$

Bei der r-Integration führen wir wieder $r_{max} = \lambda_D$ ein und zerlegen das Integrationsintervall wie folgt

$$\langle\phi^2\rangle = 4\pi n e^2 \left\{ \int_0^{e^2/k_B T} \exp\left(\frac{e^2}{k_B T r}\right) \left[1 - \phi\left(\frac{e}{(k_B T r)^{1/2}}\right)\right] dr + \right.$$

(A1.7)

$$\left. + \int_{e^2/k_B T}^{\lambda_D} \exp\left(\frac{e^2}{k_B T r}\right) \left[1 - \phi\left(\frac{e}{(k_B T r)^{1/2}}\right)\right] dr + \frac{4e\lambda_D^{1/2}}{(\pi k_B T)^{1/2}} \right\}.$$

Im ersten Integral ersetzen wir die komplementäre Fehlerfunktion durch ihre asymptotische Entwicklung (siehe Anhang A6), im zweiten verwenden wir für ϕ eine Reihenentwicklung (vgl. Anhang A6). Damit geht Gl. (A1.7) näherungsweise in

(A1.8) $$\langle \phi^2 \rangle_{Anz.} \simeq \sqrt{4\pi n e^2 k_B T}$$

über.

A2. Mittelung der Larenz-Wilkeschen Korrelationsfunktion des Ionenfeldes (5.25) über die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen

$$\langle K_i(\tau, v(\tau))\rangle_v = 4\pi\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\int_0^\infty e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}}\frac{v^2 dv}{\left[1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\left(1+\frac{v^2}{v_{oi}^2}\right)\right]^{1/2}} =$$

$$= 8\pi^{1/2}\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\int_0^\infty e^{-x^2\left[1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\left(1+\frac{v^2}{v_{oi}^2}\right)\right]} dx \int_0^\infty e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}} v^2 dv =$$

(A2.1)

$$= 2\pi\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\cdot\frac{v_{oi}^3\tau_{oi}^3}{\tau^3}\int_0^\infty e^{-x^2\left(1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right)}\cdot\frac{dx}{\left[x^2+\frac{m_e v_{oi}^2\tau_{oi}^2}{2k_B T\tau^2}\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{v_{oi}\tau_{oi}}{2^{1/2}\tau}\sqrt{\frac{m_e}{k_B T}}\, e^{\frac{m_e v_{oi}^2\tau_{oi}^2}{4k_B T\tau^2}\left(1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right)} W_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right)\frac{m_e v_{oi}^2\tau_{oi}^2}{2k_B T\tau^2}\right],$$

wobei W die in der üblichen Weise definierte Whittaker-Funktion ist. Da ihr Argument für $\tau \leqslant \tau_{oe}$ größer als 1 ist, kann sie in eine asymptotische Reihe entwickelt werden (siehe Anhang A6):

$$W_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\left[\frac{3\tau_{oe}^2}{2\tau^2}\left(1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right)\right] \simeq e^{-\frac{3\tau_{oe}^2}{4\tau^2}\left(1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right)}\cdot\left[\frac{3\tau_{oe}^2}{2\tau^2}\left(1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right)\right]^{-1/2}\cdot$$

(A2.2)

$$\cdot\left[1-\frac{\tau^2}{2\tau_{oe}^2}\left(1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right)^{-1}+\frac{5\tau^4}{8\tau_{oe}^4}\left(1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right)^{-2}\right].$$

Damit beträgt der gesuchte Mittelwert

(A2.3) $$\langle K_i(\tau, v(\tau))\rangle_v \simeq \left[1+\frac{\tau^2}{\tau_{oe}^2}\right]^{-1/2}.$$

Für $\tau > \tau_{oe}$ liefert die vorstehende Darstellung keine weiteren Informationen über die gemittelte Korrelationsfunktion. Deswegen empfiehlt es sich die Integration in (A2.1) auch auf einem anderen Weg, nämlich durch geeignete Zerlegung des Integrationsintervalls, durchzuführen.
Für $\tau \leq \tau_{oi}$ gilt näherungsweise

$$\langle K_i(\tau, v(\tau))\rangle_v \simeq 4\pi\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\left\{\left[1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right]^{-1/2}\int_0^{\frac{v_{oi}\tau_{oi}}{\tau}} e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}} v^2 dv +\right.$$

(A2.4)

$$\left. + \frac{v_{oi}\tau_{oi}}{\tau}\int_{\frac{v_{oi}\tau_{oi}}{\tau}}^{\infty} e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}} v dv\right\} = \left[1+\frac{\tau^2}{\tau_{oi}^2}\right]^{-1/2}\cdot\Phi\left[\frac{v_{oi}\tau_{oi}}{\tau}\frac{m_e^{1/2}}{(2k_B T)^{1/2}}\right] \simeq \left[1+\frac{\tau^2}{\tau_{oe}^2}\right]^{-1/2}$$

mit $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt$ (Fehlerfunktion).

A3. Ausführung der β_r-Integration in Gl. (6.15)

Mit

(A3.1) $$a^2 = 1-(\omega^2 p)^{-1}$$

und nach einfacher Umformung folgt aus Gl. (6.15):

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{\omega p^{1/2}} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^2 p}} \int_1^{\infty} e^{\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^4 p^2 (\beta_r^2 - a^2)}} \cdot \frac{d\beta_r}{(\beta_r^2 - a^2)^{3/2}} +$$

(A3.2)

$$+ \frac{2v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^5 p^{5/2}} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^2 p}} \int_1^{\infty} e^{\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^4 p^2 (\beta_r^2 - a^2)}} \frac{d\beta_r}{(\beta_r^2 - a^2)^{5/2}} .$$

Die Substitution

(A3.3) $$\beta_r^2 - a^2 = a^2 (t^2 - 1)^{-1}$$

führt die Ausdrücke I_1 und I_2 in

$$I_1 = \frac{1}{\omega a^2 p^{1/2}} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^2 p}} \; e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^4 p^2 a^2}} \int_1^{(1-a^2)^{-1/2}} \exp\left[\frac{v^2 t^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^4 p^2 a^2}\right] dt =$$

(A3.4)

$$= \frac{\pi^{1/2} \Delta v_{\parallel}^0 \omega p^{1/2}}{2va} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^0)^2 \omega^2 p}\left[1 + \frac{1}{\omega^2 p a^2}\right]} \left[j\phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^0 \omega^2 p a (1-a^2)^{1/2}}\right) - \right.$$

$$\left. - j\phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^0 \omega^2 p a}\right)\right]$$

bzw.

$$I_2 = \frac{2v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^5 p^{5/2} a^4} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^2 p}} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^4 p^2 a^2}}$$

$$\cdot \int_1^{(1-a^2)^{-1/2}} \exp\left[\frac{v^2 t^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^4 p^2 a^2}\right](t^2-1)\,dt = \frac{\pi^{1/2} \Delta v_{\parallel}^{0} \omega p^{1/2}}{va} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^2 p}\left[1+\frac{1}{\omega^2 p a^2}\right]} \cdot$$

$$\cdot \left\{ -\frac{1}{2}\left[j\Phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{0} \omega^3 p a (1-a^2)^{1/2}}\right) - j\Phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{0} \omega^2 p a}\right)\right] + \frac{v}{\pi^{1/2} \Delta v_{\parallel}^{0} p a \omega^2 (1-a^2)^{1/2}} \cdot \right.$$

(A3.5)

$$\left. \cdot e^{\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^4 p^2 a^2 (1-a^2)}} - \frac{v}{\pi^{1/2} \Delta v_{\parallel}^{0} \omega^2 p a} e^{\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^4 p^2 a^2}} \right\} -$$

$$- \frac{\pi^{1/2} v}{\Delta v_{\parallel}^{0} \omega^3 p^{3/2} a^3} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^2 p}\left[1+\frac{1}{\omega^2 p a}\right]} \left[j\Phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{0} \omega^2 p a (1-a^2)^{1/2}}\right) - \right.$$

$$\left. - j\Phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{0} \omega^2 p a}\right)\right]$$

Über,

wobei $j=(-1)^{1/2}$ und $\Phi(-jx)$ die Fehlerfunktion vom imaginären Argument ist.

Faßt man die beiden Ausdrücke I_1 und I_2 zusammen und verwendet (A3.1) wieder, so ergibt sich schließlich

$$I = \frac{\omega^2 p}{\omega^2 p - 1} - \frac{\omega p^{1/2}}{\omega^2 p - 1} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 \omega^2 p}} + \frac{\pi^{1/2} v}{\Delta v_{\parallel}^{0} (\omega^2 p - 1)^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{0})^2 (\omega^2 p - 1)}} \cdot$$

(A3.6)

$$\cdot \left[j\Phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{0} \omega p^{1/2} (\omega^2 p - 1)^{1/2}}\right) - j\Phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{0} (\omega^2 p - 1)^{1/2}}\right)\right],$$

in Übereinstimmung mit Gl. (6.15).

A4. Ausführung der Maxwell-Integration in Gl. (6.17)

Der Ausdruck

$$A=1-\frac{1}{\omega p^{1/2}}e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2 p}}+\frac{\pi^{1/2}v}{\Delta v_{\parallel}^{o}\omega^2 p(\omega^2 p-1)^{1/2}}e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}}.$$

(A4.1)

$$\cdot\left\{j\phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{o}\omega p^{1/2}(\omega^2 p-1)^{1/2}}\right)-j\phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{o}(\omega^2 p-1)^{1/2}}\right)\right\}$$

wird termweise über die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung integriert:

(A4.2)
$$<e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2 p}}>_v=\frac{3^{3/2}(\Delta v_{\parallel}^{o})^3\omega^3 p^{3/2}}{2^{3/2}v_{oe}^3}\left[1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2 p}{2v_{oe}^2}\right]^{-3/2};$$

$$<ve^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}}\phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{o}\omega p^{1/2}(\omega^2 p-1)^{1/2}}\right)>_v=$$

(A4.3)
$$=\frac{8\pi^{1/2}(-j)}{\Delta v_{\parallel}^{o}\omega p^{1/2}(\omega^2 p-1)^{1/2}}\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\int_0^1 dz\int_0^\infty e^{-v^2\left[\frac{m_e}{2k_B T}+\frac{1}{(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}\right]}$$

$$\cdot e^{\frac{v^2 z^2}{(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2 p(\omega^2 p-1)}}v^4 dv=(-j)\pi(\Delta v_{\parallel}^{o})^4\omega^4 p^2(\omega^2 p-1)^2\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\cdot$$

//

$$\left\{\frac{1}{\omega^2 p\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}{2 v_{oe}^2}\right)}\cdot\frac{1}{\left[\omega^2 p\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}{2 v_{oe}^2}\right)-1\right]^{3/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left[\omega^2 p\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}{2 v_{oe}^2}\right)\right]^2}\cdot\frac{1}{\left[\omega^2 p\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}{2 v_{oe}^2}\right)-1\right]^{1/2}}\right\}\cdot$$

Ganz analog ergibt sich auch der Mittelwert des letzten Terms in (A4.1)

$$<v e^{-\frac{v^2}{(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}}\phi\left(\frac{-jv}{\Delta v_{\parallel}^{o}(\omega^2 p-1)^{1/2}}\right)>_v=(-j)\pi\Delta v_{\parallel}^{o4}(\omega^2 p-1)^2\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\cdot$$

(A4.4)

$$\cdot\left\{\frac{1}{1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}{2 v_{oe}^2}}\cdot\frac{2^{3/2} v_{oe}^3}{3^{3/2}(\Delta v_{\parallel}^{o})^3(\omega^2 p-1)^{3/2}}+\frac{2}{\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}{2 v_{oe}^2}\right)^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{2^{1/2} v_{oe}}{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{o}(\omega^2 p-1)^{1/2}}\right\}.$$

Nach Zusammenfassung der vier, mit den entsprechenden Vorfaktoren multiplizierten und gemittelten Terme aus (A4.1), folgt schließlich:

$$<A>_v=\left[1-\frac{3^{3/2}(\Delta v_{\parallel}^{o})^3\omega^2 p}{2^{3/2} v_{oe}^3}\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2\omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right)^{-3/2}\right]\left\{1-\left[\omega^2 p\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2(\omega^2 p-1)}{2 v_{oe}^2}\right)\right]^{-1}\right\}-$$

(A4.5)

$$-\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^{2}(\omega_p^2-1)}{v_{oe}^2\omega^2 p}\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^{2}(\omega_p^2-1)}{2v_{oe}^2}\right)^{-2}\left[1-\frac{3^{1/2}\Delta v_{\parallel}^{0}}{2^{1/2}v_{oe}}\left(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^{2}\omega_p^2}{2v_{oe}^2}\right)^{-1/2}\right],$$

in Übereinstimmung mit Gl. (6.32).

A5. Ausführung des Produkts in Gl. (6.33) bzw. (6.34)

Gemäß Gl. (6.34) haben wir folgende Produkte zu berechnen:

$$A_1 = \exp \ln \prod_{p=1}^{n} \left[1 + \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right]\left[1 + \frac{3\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2} - \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2}{2 v_{oe}^2}\right]^{-1}; \tag{A5.1}$$

$$A_2 = \exp \ln \prod_{p=1}^{n} (1 - b_p - c_p + d_p), \tag{A5.2}$$

wobei

$$b_p = \frac{3^{3/2}(\Delta v_{\parallel}^{o})^3 \omega^2 p}{2^{3/2} v_{oe}^3}\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right]^{-3/2}, \tag{A5.3}$$

$$c_p = \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2}{v_{oe}^2}\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right]^{-1}\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2} - \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2}{2 v_{oe}^2}\right]^{-1}, \tag{A5.4}$$

$$d_p = \frac{3^{3/2}(\Delta v_{\parallel}^{o})^3}{2^{1/2} v_{oe}^3}\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2}\right]^{-3/2}\left[1 + \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2 p}{2 v_{oe}^2} - \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2}{2 v_{oe}^2}\right]^{-1}. \tag{A5.5}$$

(A5.1) liefert näherungsweise

$$A_1 \approx \exp \int_{1/2}^{n+1/2} \left(\omega^2 p + \frac{2 v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2}\right)^{-1} dp = \left[\frac{n + \frac{1}{2} + \frac{2 v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2}}{\frac{1}{2} + \frac{2 v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{o})^2 \omega^2}}\right]^{\frac{1}{\omega^2}}. \tag{A5.6}$$

(A5.2) führt nach Entwicklung des Logarithmus auf die Integrale

/.

$$A_2 \approx \exp\Big[-\int_{1/2}^{n+1/2} \frac{3^{3/2}(\Delta v_{\parallel}^{0})^3\omega^2 p}{2^{3/2}v_{oe}^3}\Big(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2 p}{2v_{oe}^2}\Big)^{-3/2} dp\Big]\cdot$$

$$\cdot\exp\Big[-\int_{1/2}^{n+1/2} \frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2}{v_{oe}^2}\Big(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2 p}{2v_{oe}^2}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2 p}{2v_{oe}^2}-\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2}{2v_{oe}^2}\Big)^{-1} dp\Big]\cdot$$

$$\cdot\exp\Big[\int_{1/2}^{n+1/2} \frac{3^{3/2}(\Delta v_{\parallel}^{0})^3}{2^{1/2}v_{oe}^3}\Big(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2 p}{2v_{oe}^2}\Big)^{-3/2}\Big(1+\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2 p}{2v_{oe}^2}-\frac{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2}{2v_{oe}^2}\Big)^{-1} dp\Big] =$$

(A5.7)
$$= \exp\Big[-\frac{2}{\omega}\Big(n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2}\Big)^{1/2}\Big]\exp\Big[\frac{2}{\omega}\Big(\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2}\Big)^{1/2}\Big]\cdot$$

$$\cdot\exp\Big[\frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^3}\Big(n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2}\Big)^{-1/2}\Big]\exp\Big[-\frac{4v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^3}\Big(\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2}\Big)^{-1/2}\Big]\cdot$$

$$\cdot\exp\Big\{\frac{8v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^3}\Big[\ln\Big(1+\frac{1}{\omega\Big(\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2}\Big)^{1/2}}\Big)-\ln\Big(1+\frac{1}{\omega\Big(n+\frac{1}{2}+\frac{2v_{oe}^2}{3(\Delta v_{\parallel}^{0})^2\omega^2}\Big)^{1/2}}\Big)\Big]\Big\}.$$

Das Produkt A_1A_2 stimmt mit (6.35) überein.

A6. Zusammenfassung der in der Arbeit vorkommenden speziellen Funktionen

1. Fehlerfunktion

(A6.1) $$\phi(x)=\frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

Reihenentwicklung für $x<1$:

(A6.2) $$\phi(x)=\frac{2}{\pi^{1/2}}e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot3\cdots(2n+1)}x^{2n+1}$$

Asymptotische Entwicklung für $|x|\to\infty$:

(A6.3) $$\pi^{1/2}xe^{x^2}[1-\phi(x)]=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{(2x^2)^n},$$

wobei $1-\phi(x)$ die komplementäre Fehlerfunktion bedeutet.
Fehlerfunktion vom imaginären Argument:

(A6.4) $$i\phi(-ix)=\frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^x e^{t^2}dt$$

2. Lommel-Funktion

Integraldarstellung:

(A6.5) $$\int_0^{\infty}e^{-\beta\,\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{ch}\,\gamma x\,dx=S_{0,\gamma}(\beta),$$

(A6.6) $$\int_0^{\infty}e^{-\beta\,\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{sh}\,\gamma x\,dx=\gamma S_{-1,\gamma}(\beta)$$

Asymptotische Entwicklung für $|z|\to\infty$, $|\arg z|<\pi$:

$$(A6.7)\quad S_{\mu,\nu}(z)\sim z^{\mu-1}\left[1-\frac{(\mu-1)^2-\nu^2}{z^2}+\frac{[(\mu-1)^2-\nu^2][(\mu-3)^2-\nu^2]}{z^4}-\cdots\right],$$

wobei $\mu\pm\nu$ keine positiven, ungeraden ganzen Zahlen sein dürfen.

3. Modifizierte Bessel-Funktion

Integraldarstellung :

$$(A6.8)\quad K_\nu(z)=\int_0^\infty e^{-z\operatorname{cht}}\operatorname{ch}\nu t\,dt\;;\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}$$

Asymptotische Reihe:

$$(A6.9)\quad K_\nu(z)\simeq\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\left[1+\frac{\mu-1}{8z}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3}\right],$$

wobei $\mu=4\nu^2$, $|\arg z|<\frac{3\pi}{2}$.

4. Whittaker-Funktionen

Die Whittakersche Differentialgleichung

$$(A6.10)\quad \frac{d^2w}{dz^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{z}+\frac{0{,}25-\mu^2}{z^2}\right]w=0$$

hat folgende Lösungen:

$$(A6.11)\quad M_{\lambda,\pm\mu}(z)=z^{\pm\mu+1/2}\cdot\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\Phi\left(\pm\mu-\lambda+\frac{1}{2},\pm2\mu+1;z\right)$$

bzw.

$$(A6.12)\quad W_{\lambda,\mu}(z)=\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(0{,}5-\mu-\lambda)}M_{\lambda,\mu}(z)+\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(0{,}5+\mu-\lambda)}M_{\lambda,-\mu}(z),$$

wobei

(A6.13) $$\Phi(\alpha,\gamma;z)=1+\frac{\alpha z}{1!\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)z^2}{2!\gamma(\gamma+1)}+\cdots$$

die entartete hypergeometrische Funktion ist.
Asymptotische Entwicklung:

$$W_{\lambda,\mu}(z)\sim \exp(-\frac{z}{2})z^{\lambda}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\mu^2-(\lambda-0{,}5)^2][\mu^2-(\lambda-1{,}5)^2]\cdots[\mu^2-(\lambda-k+0{,}5)^2]}{k!z^k}\right\}$$

(A6.14)

wobei
$|z|\to\infty$; $|\arg z|<\pi$.

10. Literaturverzeichnis

/1/ Langmuir, I. — Über elektrische Entladungen in Gasen bei niedrigen Drucken
Z. Physik 46, 271 (1927)

/2/ Landau, L. — Die kinetische Gleichung für den Fall Coulombscher Wechselwirkung
Phys. Z. USSR 10,1154 (1936)

/3/ Gvosdover, S. D. — Mobility and Mean Free Path of Electrons in the Positive Column
Phys. Z. USSR 12, 164 (1937)

/4/ Druyvesteyn, M. J. — The interaction between an electron beam and a plasma
Physica 5, 561 (1938)

/5/ Rompe, R.; Steenbeck, M. — Der Plasmazustand der Gase
Ergebn. exakt. Naturwiss. 18, 273 (1939)

/6/ Gabor, D. — Die Ausbildung der Maxwellverteilung im Langmuirschen Plasma
Physik. Z. 34, 38 (1933)

/7/ Gabor, D. — Elektrostatische Theorie des Plasmas
Z. Physik 84, 474 (1933)

/8/ Larenz, R. W. — Zur Transportweglänge im Plasma
Naturwiss. 48, 40 (1961)

/9/ Chapman, S.; Cowling, T. G. — The Mathematical Theory of Nonuniform Gases
Cambridge Univ. Press 1958

/10/ Chandrasekhar, S. — Stochastic Problems in Physics and Astronomy
Rev. Mod. Phys. 15, 1 (1943)

/11/ Chandrasekhar, S. — The Time of Relaxation of Stellar Systems I.
Astrophys. J. 93, 285 (1941)

/12/ Williamson, R. E.; Chandrasekhar, S.
The Time of Relaxation of Stellar Systems II.
Astrophys. J. 93, 305 (1941)

/13/ Cohen, R. S.; Spitzer, L.; Routly, P. McR.
The Electrical Conductivity of an Ionized Gas
Phys. Rev. 80, 230 (1950)

/14/ Spitzer, L.; Härm, R.
Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas
Phys. Rev. 89, 977 (1953)

/15/ Suchy, K.
Neue Methoden in der kinetischen Theorie verdünnter Gase
Ergebn. exakt. Naturwiss. Band XXXV (1964)

/16/ Capitelli, M.; Devoto, R. S.
Transport Coefficients of High-Temperature Nitrogen
Phys. Fluids 16, 1835 (1973)

/17/ Devoto, R. S.
Electron Transport Properties in High-Temperature Air
Phys. Fluids 19, 22 (1976)

/18/ Capitelli, M.
Charge Transfer from Low-Lying Excited States: Effects on Reactive Thermal Conductivity
J. Plasma Phys. 14, 365 (1975)

/19/ Cacciatore, M.; Capitelli, M.
The Temporal Evolution of Population Densities of Excited States in Atomic Oxygen Thin Plasmas
JQSRT 16, 325 (1976)

/20/ Wilhelm, J.; Winkler, R.
Stoßbestimmte Relaxation des Elektronenensembles im Plasma bei zusätzlicher Aufheizung durch ein elektrisches Feld I, II
I: Annalen Phys. 34, 119 (1977)
II: " 34, 369 (1977)

/21/ Hunger, K.; Larenz, R. W.
Das Mikrofeld im Plasma
Z. Phys. 163, 245 (1961)

/22/ Hunger, K.; Larenz, R. W.
Zum kollektiven Anteil des Plasma-Mikrofeldes
Z. Naturforsch. 23a, 1488 (1968)

/23/ Holtsmark, J. — Über die Verbreiterung von Spektrallinien
Annalen Phys. 58, 577 (1919)

/24/ Krall, N. A.; Trivelpiece, A. W. — Principles of Plasma Physics
McGraw-Hill Book Comp. 1973

/25/ Larenz, R. W. — Plasmaströmungen großer Amplitude und Ladungstrennung
Z. Naturforsch.10a, 766 (1955)

/26/ Hunger, K.; Larenz, R. W. — Kurzmitteilung zum Plasma-Mikrofeld
Beitr. aus d. Plasmaphys. 3/63, 161 (1962)

/27/ Theimer, O.; Gentry, R. — Scattering Potential in Fully Ionized Gases
Phys. Rev. 116, 787 (1959)

/28/ Ecker, G.; Müller, K. G. — Plasmapolarisation und Trägerwechselwirkung
Z. Phys. 153, 317 (1958)

/29/ Bessenrodt, R. — Ableitung und Untersuchung einer kinetischen Gleichung für räumlich homogene Systeme mit kollektiver Wechselwirkung
I: Annalen Phys. 18, 219 (1966)
II: " 19, 128 (1967)

/30/ Weise, K. — Die Verteilungen des elektrischen Mikrofeldes und Mikropotentials im Plasma
Z. Phys. 183, 36 (1965)

/31/ Morita, T. — Formulae for the Microfield and Micropotential Distribution Functions and Their Application to a High-Temperature Plasma
Progr. Theor. Phys.(Kyoto) 23, 1211 (1960)

/32/ Wilke, K. — Numerische Untersuchung charakteristischer Größen eines Plasmamodells
Z. Naturforsch. 23, 761 (1968)

/33/ Skullerud, H. R. — On the Relation between the Diffusion and Mobility of Gaseous Ions Moving in Strong Electric Fields
J. Phys. 9, 535 (1976)

/34/ Viehland, L. A.; Mason, E. A. — Gaseous Ion Mobility and Diffusion in Electric Fields of Arbitrary Strength
Annals Phys. 110, 287 (1978)

/35/ Spitzer, L. — Physics of Fully Ionized Gases
Interscience Publ., N.Y. 1962

/36/ Uhlenbeck, G. E.; Ornstein, L. S. — On the Theory of the Brownian Motion
Phys. Rev. 36, 823 (1930)

/37/ Maecker, H.; Peters, Th.; Schenk, H. — Ionen- und Atomquerschnitte im Plasma verschiedener Gase
Z. Phys. 140, 119 (1955)

/38/ Welly, J. D. — Anfachung von Elektronen-Plasmaschwingungen durch Stoßwellen
Z. Naturforsch. 18a, 1157 (1963)

/39/ Morris, J. C.; Rudis, R. P.; Yos, J. M. — Measurements of Electrical and Thermal Conductivity of Hydrogen, Nitrogen and Argon at High Temperatures
Phys. Fluids 13, 608 (1970)

/40/ Plantikow, U.; Steinberger, S. — Elektrische und thermische Leitfähigkeit von Wasserstoff bis 27000 ^{o}K
Z. Phys. 231, 109 (1970)

/41/ Haar, D. ter — Elements of Statistical Mechanics
Holt, Rinehart and Winston 1964

/42/ Devoto, R. S. — Transport Coefficients of Partially Ionized Hydrogen
Plasma Phys. 2, 617 (1968)

/43/ Semlyen, J. — Transportweglänge im Plasma
Verh. d. Deutschen Phys. Ges. 6/1979, Bochum

/44/ Semlyen, J. — Relaxation Length of Electrons in a Hot Low Density Plasma V-th ESCAMPIG, Dubrovnik, Vol. 4D/1980

/45/ Abramowitz, M; Stegun, I. A. — Handbook of Mathematical Functions Dover Publ. Inc., N. Y. 1964

/46/ Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. — Table of Integrals, Series and Products Acad. Press, N. Y. 1965

Dank

Die vorliegende Arbeit entstand im Institut für Theoretische Physik I der Universität Düsseldorf. Dem Direktor des Instituts, Prof. Dr. R.W. Larenz bin ich für die Stellung des Themas und für zahlreiche fördernde Diskussionen zu großem Dank verpflichtet.

Lebenslauf

Johann Semlyen	geb. am 16.1.1947 in Klausenburg, Rumänien Eltern: Dr. Stefan Semlyen, Bibliothekar; Eva Semlyen, geb. Pollak, Lehrbeauftragte
1954-1958	Besuch der Volksschule in Klausenburg
1958-1965	Besuch des Gymnasiums in Klausenburg Abitur
1965-1970	Physik-Studium an der Universität Babes-Bolyai Klausenburg Anschließend Diplom-Hauptprüfung
1970-1974	Tätigkeit als Studienrat für Physik und Mathematik Nebenbei Veröffentlichung einer Schrift als Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie (in ungarischer Sprache)
1975	Übersiedlung in die BRD Deutschkurs im Goethe-Institut Iserlohn
1975-1976	Verwalter einer Assistentenstelle im Institut für Theoretische Physik der Universität Düsseldorf
Seit 1976	Wissenschaftlicher Assistent im selben Institut
Seit 8.12.1973	Verheiratet mit Eva Semlyen, geb. Sarpaczki, Diplom-Philologin, 1 Kind